تاریخ چاپ: بهار ۱۳۹۱

تعمیمی از توزیع چولهٔ t- نرمال و مدل‌بندی میزان آلودگی به نیکل در تالاب شادگان

آمنه خردمندی، *محسن محمدزاده: دانشگاه تربیت مدرس، گروه آمار
ناهید سنجری فارسی‌پور: دانشگاه الزهرا، گروه آمار

چکیده

در برخی مسایل کاربردی از توزیع چوله t-نرمال که دارای دم‌های کلفت‌تر و ضرایب چولگی و کشیدگی با برد وسیع‌تر نسبت به توزیع چوله نرمال است، برای مدل‌بندی داده‌هایی با توزیع نامتقارن استفاده می‌شود. در این مقاله تعمیمی جدید برای توزیع چوله t–نرمال معرفی و ویژگی‌های آن بررسی می‌شود. همچنین فرم بسته‌ای برای محاسبهٔ گشتاورهای این تعمیم ارائه و سه روش برای شبیه‌سازی آن مطرح می‌گردد. سپس کاربرد توزیع‌های چوله نرمال، چوله t-نرمال و چوله t-نرمال تعمیم یافته در مدل‌بندی داده‌های میزان آلودگی به فلز نیکل در تالاب شادگان واقع در جنوب غربی ایران را ارائه شده و در انتها به بحث و نتیجه‌گیری پرداخته می‌شود.

مقدمه

برای مدل‌بندی داده‌های نامتقارن، آزالینی [۲] توزیع چوله نرمال را با تابع چگالی

$$f(x;\gamma) = 2\phi(x)\Phi(\lambda x),\ x\in R,\ \lambda\in R,$$

معرفی کرد که در آن $\lambda\in R$ پارامتر چولگی، ϕ تابع چگالی و Φ تابع توزیع نرمال استاندارد است. این توزیع به‌صورت $SN(\lambda)$ نمایش داده می‌شود و ویژگی‌های متنوع آن در [۳] تا [۸] بررسی شده است. با توجه به محدودیت ضرایب چولگی و کشیدگی توزیع SN و همچنین باریکی دم‌های این توزیع، گامز و همکاران [۹] توزیع چوله t-نرمال را معرفی کردند، که دارای دم‌های کلفت‌تر و ضرایب چولگی و کشیدگی با برد وسیع‌تر است. تابع توزیع چوله t-نرمال به‌صورت

$$f(x;\gamma,\lambda) = 2\psi(x;\gamma)\Phi(\lambda x),\ \ x\in R,\lambda\in R$$

است که در آن $\psi(x;\gamma)$ تابع چگالی توزیع t-استیودنت با γ درجه آزادی، Φ تابع توزیع نرمال استاندارد و λ پارامتر چولگی است. توزیع چوله t-نرمال با $StN(\gamma,\lambda)$ نمایش داده می‌شود و برخی از ویژگی‌های آن را [۹] و [۱۰] مطرح کرده‌اند. ویژگی‌های دیگری از توزیع چوله t-نرمال مانند قویا تک‌مدی بودن و نحوهٔ ساخت آن نیز توسط [۱] بررسی شده است. همچنین تعمیم‌هایی از توزیع چوله t–نرمال به‌همراه ویژگی‌های آن‌ها

واژه‌های کلیدی: کریگیدن، توزیع چوله نرمال، چوله t-نرمال، پارامتر چولگی، تعمیم توزیع چوله t-نرمال.
دریافت ۸۹/٤/۲٦ پذیرش۹۰/٤/۲۵

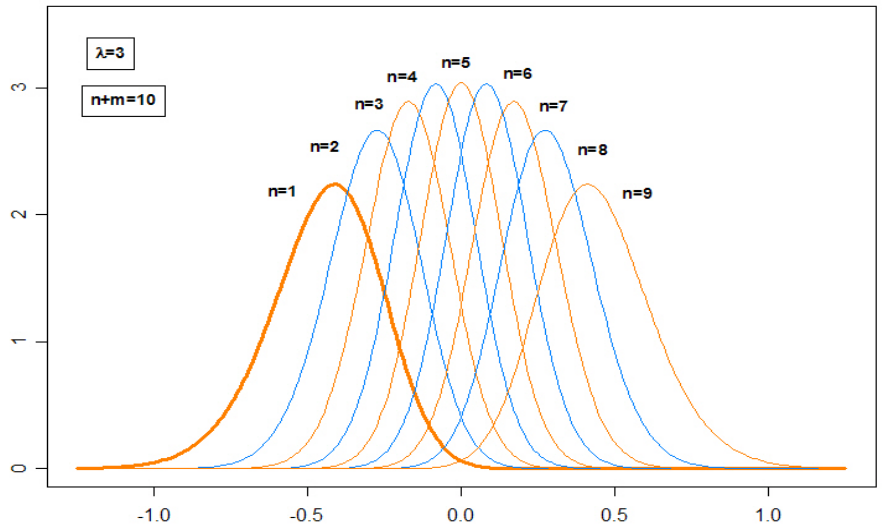
*نویسنده مسئول

[Downloaded from jsci.khu.ac.ir on 2026-09-28]

در [۱۱] ارائه شده است. در این مقاله تعمیمی جدید، علاوه بر تعمیم‌های ارائه شده در [۱۱] برای توزیع چوله t –نرمال معرفی و ویژگی‌های آن به همراه روش‌های ساخت این توزیع بررسی می‌شود. سپس کاربرد توزیع‌های چوله بیان شده در یك مطالعه موردی بر مجموعه داده‌های آلودگی به فلز نیکل در تالاب شادگان نشان داده می‌شود. در انتها نیز به بحث و نتیجه‌گیری پرداخته می‌شود.

توزیع چوله t-نرمال تعمیم یافته

در [۱۲] تعمیمی برای توزیع چوله نرمال ارائه شده و ضمن بررسی ویژگی‌های آن کاربرد این توزیع در آماره‌های ترتیبی نشان داده شده است. در این بخش تعمیمی مشابه [۱۲]، اما برای توزیع چوله t-نرمال، ارائه و ویژگی‌های آن بررسی شده است.



شکل۱. تابع چگالی چوله t-نرمال تعمیم یافته به ازای مقادیر مختلف (n,m)

تعریف ۱. متغیر تصادفی X را دارای توزیع چوله t-نرمال تعمیم یافته با پارامتر چولگی λ می‌نامیم هرگاه تابع چگالی آن به‌صورت

$$f_{n,m}(x;\gamma,\lambda)=\frac{1}{c_{n,m}(\gamma,\lambda)}[\Phi(\lambda x)]^n[1-\Phi(\lambda x)]^m\psi(x;\gamma)$$

باشد، که در آن $m,n\in N\cup\{0\}$ و $c_{n,m}(\gamma,\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}[\Phi(\lambda x)]^n[1-\Phi(\lambda x)]^m\psi(x;\gamma)dx$. این توزیع به‌صورت $GStN_{n,m}(\gamma,\lambda)$ نمایش داده می‌شود و شکل۱ نمودار تابع چگالی $GStN_{n,m}(5,\lambda)$ را به‌ازای مقادیر مختلف پارامترهای n و m نشان می‌دهد. چنان‌که ملاحظه می‌شود با تغییر دو پارامتر n و m خانواده‌ای از توزیع چوله t-نرمال تعمیم یافته حاصل می‌شود که حالت خاص آن توزیع چوله t-نرمال معمولی است.

ویژگی‌های توزیع چوله t–نرمال تعمیم یافته

اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع $GStN_{n,m}(\gamma,\lambda)$ باشد، به‌سادگی می‌توان نشان داد:

الف: اگر $n=1$ و $m=0$، آنگاه $X\sim tN(\gamma,\lambda)$.

[Downloaded from jsci.khu.ac.ir on 2026-09-28]

ب: اگر $n=m=0$ یا $\lambda=0$ ، آنگاه $X \sim \psi(x;\gamma)$.

لم ۱: اگر $c_{n,m}(\gamma,\lambda)$ به‌صورت (۱) تعریف شود، آن‌گاه $c_{n,m}(\gamma,\lambda)=c_{n,m}(\gamma,-\lambda)=c_{m,n}(\gamma,\lambda)$.

برهان:

$$\begin{aligned} c_{n,m}(\gamma,\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty}[\Phi(\lambda x)]^n[1-\Phi(\lambda x)]^m \psi(x;\gamma)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}[\Phi(-\lambda x)]^n[1-\Phi(-\lambda x)]^m \psi(x;\gamma)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}[1-\Phi(\lambda x)]^n[\Phi(\lambda x)]^m \psi(x;\gamma)dx \end{aligned}$$

نتیجه ۱: اگر $X \sim GStN_{n,m}(\gamma,-\lambda)$ و $Y \sim GStN_{m,n}(\gamma,\lambda)$ آنگاه X و Y هم توزیع هستند.

نتیجه۲: به ازای هر مقدار ثابت (γ,λ) ، توزیع $GStN_{n,m}(\gamma,\lambda)$ متقارن است اگر و تنها اگر $n=m$.

لم ۲: فرض کنید متغیر تصادفی $X \sim GStN_{n,m}(\gamma,\lambda)$ از نمونهٔ تصادفی $Z_1,...,Z_{n_1+n_2} \sim N(0,1)$ مستقل باشد و پیشامد A به‌صورت {دقیقاً n_1 تا از Z_i ها کوچک‌تر یا مساوی با λX باشد} $= A$ تعریف شود، در این صورت $X|A \sim GStN_{n+n_1,m+n_2}(\gamma,\lambda)$.

برهان:

$$\begin{aligned} f(x|A) &= \frac{P(A|X=x)f_X(x)}{P(A)} \\ &= \frac{\binom{n_1+n_2}{n_1}[\Phi(\lambda x)]^{n_1}[1-\Phi(\lambda x)]^{n_2}\frac{1}{c_{n,m}(\gamma,\lambda)}[\Phi(\lambda x)]^n[1-\Phi(\lambda x)]^m\psi(x;\gamma)}{\int_{-\infty}^{+\infty}P(A|X=x)f_X(x)dx} \\ &= \frac{[\Phi(\lambda x)]^{n+n_1}[1-\Phi(\lambda x)]^{m+n_2}\psi(x;\gamma)}{\int_{-\infty}^{+\infty}[\Phi(\lambda x)]^{n+n_1}[1-\Phi(\lambda x)]^{m+n_2}\psi(x;\gamma)dx} \end{aligned}$$

نتیجه ۳: اگر $X \sim GStN_{n,m}(\gamma,\lambda)$ و $Z_1,...,Z_p \sim N(0,1)$ مستقل باشند، آن‌گاه

$X|\{Z_{(1)} \le \lambda X\} \sim GStN_{n,m+p}(\gamma,\lambda)$ و $X|\{Z_{(p)} \le \lambda X\} \sim GStN_{n+p,m}(\gamma,\lambda)$

که در آن $Z_{(1)}$ و $Z_{(p)}$ اولین و p-امین آماره ترتیبی هستند.

لم زیر فرم بسته‌ای برای گشتاورهای توزیع چوله t- نرمال تعمیم یافته ارائه می‌کند.

لم ۳: اگر $X \sim GStN_{n,m}(\gamma,\lambda)$ ، آن‌گاه

$$E(X^n)=\frac{1}{c_{n,m}(\gamma,\lambda)}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\left(\sum_{j=0}^{m+i}\binom{m+i}{j}(-1)^{k+j}I_{K,j}(\gamma,\lambda)+I_{k,m+i}(\gamma,\lambda)\right)$$

که در آن $I_{K,j}(\gamma,\lambda)=\int_0^{\infty}x^k[1-\Phi(\lambda x)]^j\psi(x;\gamma)dx$.

برهان: تابع چگالی توزیع $GStN_{n,m}(\gamma,\lambda)$ را می‌توان بدین صورت نوشت:

$$\begin{aligned} f_{n,m}(x;\lambda) &= \frac{1}{c_{n,m}(\gamma,\lambda)}[\Phi(\lambda x)]^n[1-\Phi(\lambda x)]^m\psi(x;\gamma) \\ &= \frac{1}{c_{n,m}(\gamma,\lambda)}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}[1-\Phi(\lambda x)]^{m+i}\psi(x;\gamma) \end{aligned}$$

[Downloaded from jsci.khu.ac.ir on 2026-09-28]

بنا بر این

$$E(X^k)=\frac{1}{c_{n,m}(\gamma,\lambda)}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\int_{-\infty}^{+\infty}x^k[1-\Phi(\lambda x)]^{m+i}\psi(x;\gamma)dx$$

انتگرال آخر در رابطه (۲) عبارت است از:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}x^k[1-\Phi(\lambda x)]^{m+i}\psi(x;\gamma)dx\\
&=(-1)^k\int_0^{\infty}x^k[1-(1-\Phi(\lambda x))]^{m+i}\psi(x;\gamma)dx+\int_0^{\infty}x^k[1-\Phi(\lambda x)]^{m+i}\psi(x;\gamma)dx\\
&=(-1)^k\int_0^{\infty}x^k[\Phi(\lambda x))]^{m+i}\psi(x;\gamma)dx+\int_0^{\infty}x^k[1-\Phi(\lambda x)]^{m+i}\psi(x;\gamma)dx\\
&=(-1)^k\int_0^{\infty}x^k\sum_{j=0}^{m+i}\binom{m+i}{j}(-1)^j[1-\Phi(\lambda x)]^j\psi(x;\gamma)dx+I_{k,m+i}(\gamma,\lambda)\\
&=\sum_{j=0}^{m+i}\binom{m+i}{j}(-1)^{j+k}\int_0^{\infty}x^k[1-\Phi(\lambda x)]^j\psi(x;\gamma)dx+I_{k,m+i}(\gamma,\lambda)\\
&=\sum_{j=0}^{m+i}\binom{m+i}{j}(-1)^{j+k}I_{k,j}(\gamma,\lambda)+I_{k,m+i}(\gamma,\lambda)
\end{aligned}$$

با جای‌گذاری مقدار انتگرال در (۲) حکم اثبات می‌شود.

روش‌های ساخت توزیع چوله t–نرمال تعمیم یافته

در این بخش سه روش ساخت متغیرهای تصادفی از توزیع $GStN_{n,m}(\gamma,\lambda)$ ارائه می‌شود.

لم ٤: فرض کنید $T\sim t(\gamma)$ و $Z_1,...,Z_{n+m}\sim N(0,1)$ از هم مستقل باشند. در این صورت

$$X\equiv T\,\big|\,N\{U_i:U_i\le\Phi(\lambda T)\}=n\sim GStN_{n,m}(\gamma,\lambda)$$

که در آن $N\{Z_j:Z_j\le\lambda T\}$ نشان‌دهندهٔ تعداد Z_j هایی است که کم‌تر از λT هستند.

برهان:

$$\begin{aligned}
f_X(x;\lambda)&=f_T(x\,|\,N\{U_i:U_i\le\Phi(\lambda T)\}=n)\\
&=\frac{P(N\{U_i:U_i\le\Phi(\lambda T)\}=n\,|\,T=x)\psi(x;\gamma)}{P(N\{U_i:U_i\le\Phi(\lambda T)\}=n)}\\
&=\frac{P(N\{U_i:U_i\le\Phi(\lambda x)\}=n)\psi(x;\gamma)}{\int_{-\infty}^{+\infty}P(N\{U_i:U_i\le\Phi(\lambda T)\}=n\,|\,T=t)\psi(t;\gamma)dt}\\
&=\frac{\binom{n+m}{n}[\Phi(\lambda x)]^n[1-\Phi(\lambda x)]^m\psi(x;\gamma)}{\int_{-\infty}^{+\infty}\binom{n+m}{n}[\Phi(\lambda t)]^n[1-\Phi(\lambda t)]^m\psi(t;\gamma)dt}\\
&=\frac{[\Phi(\lambda x)]^n[1-\Phi(\lambda x)]^m\psi(x;\gamma)}{\int_{-\infty}^{+\infty}[\Phi(\lambda t)]^n[1-\Phi(\lambda t)]^m\psi(t;\gamma)dt}
\end{aligned}$$

[Downloaded from jsci.khu.ac.ir on 2026-09-28]

اگر در لم ٤ جای شرط $Z \le \lambda T$ با $Z \ge \lambda T$ تعویض شود، علامت پارامتر چولگی تغییر می‌کند و بنا بر نتیجهٔ ١ جای پارامترهای n و m عوض می‌شود.

لم٥. فرض کنید متغیر تصادفی $T \sim t(\gamma)$ مستقل از نمونه تصادفی $Z_1,...,Z_{n+m} \sim N(0,1)$ باشد، اگر متغیر تصادفی X به‌صورت

$$X \equiv \begin{cases} T \,|\, N\{Z_j : Z_j \le \lambda T\} = n, & \text{با احتمال } r \\ -T \,|\, N\{Z_j : Z_j > \lambda T\} = n, & \text{با احتمال } 1-r \end{cases}$$

تعریف شود، آن‌گاه $X \sim GStN_{n,m}(\gamma,\lambda)$

برهان:

$$f_X(x;\lambda) = r f_T(x \,|\, N\{Z_j : Z \le \lambda T\} = n) + (1-r) f_T(-x \,|\, N\{Z_j : Z > \lambda T\} = n)$$

$$= r \frac{P(N\{Z_j : Z_j \le \lambda T\} = n \,|\, T = x)\psi(x;\gamma)}{P(N\{Z_j : Z_j \le \lambda T\} = n)}$$

$$+ (1-r) \frac{P(N\{Z_j : Z_j > \lambda T\} = n \,|\, T = -x)\psi(-x;\gamma)}{P(N\{Z_j : Z_j > \lambda T\} = n)}$$

$$= r \frac{\binom{n+m}{n}[\Phi(\lambda x)]^n[1-\Phi(\lambda x)]^m \psi(x;\gamma)}{\int_{-\infty}^{+\infty}\binom{n+m}{n}[\Phi(\lambda t)]^n[1-\Phi(\lambda t)]^m \psi(t;\gamma)dt}$$

$$+ (1-r) \frac{\binom{n+m}{n}[\Phi(\lambda x)]^n[1-\Phi(\lambda x)]^m \psi(x;\gamma)}{\int_{-\infty}^{+\infty}\binom{n+m}{n}[\Phi(\lambda t)]^n[1-\Phi(\lambda t)]^m \psi(t;\gamma)dt}$$

$$= \frac{[\Phi(\lambda x)]^n[1-\Phi(\lambda x)]^m \psi(x;\gamma)}{\int_{-\infty}^{+\infty}[\Phi(\lambda t)]^n[1-\Phi(\lambda t)]^m \psi(t;\gamma)dt}$$

لم٦. فرض کنید متغیر تصادفی $T \sim t(\gamma)$ مستقل از نمونه تصادفی $U_1,...,U_{n+m} \sim U(0,1)$ باشد. در این صورت $X \equiv T \,|\, N\{U_i : U_i \le \Phi(\lambda T)\} = n \sim GStN_{n,m}(\gamma,\lambda)$ است.

[Downloaded from jsci.khu.ac.ir on 2026-09-28]

برهان: پیشامد $N\{U_i : U_i \le \Phi(\lambda T)\} = n$ معادل است با این‌که دقیقاً n تا از U_i ها کوچک‌تر یا مساوی با $\Phi(\lambda T)$ باشد. بنا بر این

$$f_X(x;\lambda) = f_T(x \mid N\{U_i : U_i \le \Phi(\lambda T)\} = n)$$

$$= \frac{P(N\{U_i : U_i \le \Phi(\lambda T)\} = n \mid T = x)\psi(x;\gamma)}{P(N\{U_i : U_i \le \Phi(\lambda T)\} = n)}$$

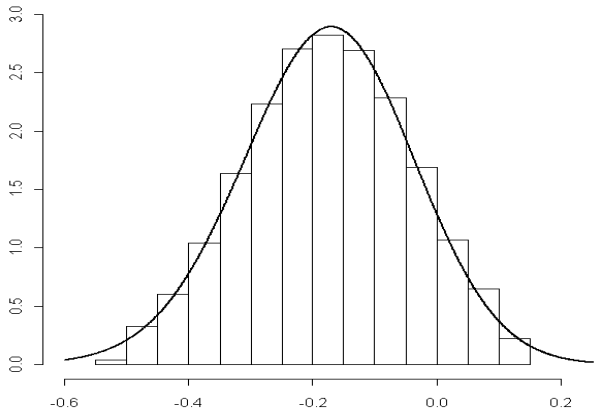
$$= \frac{P(N\{U_i : U_i \le \Phi(\lambda x)\} = n)\psi(x;\gamma)}{\int_{-\infty}^{+\infty} P(N\{U_i : U_i \le \Phi(\lambda T)\} = n \mid T = t)\psi(t;\gamma)dt}$$

$$= \frac{\binom{n+m}{n}[\Phi(\lambda x)]^n[1-\Phi(\lambda x)]^m\psi(x;\gamma)}{\int_{-\infty}^{+\infty}\binom{n+m}{n}[\Phi(\lambda t)]^n[1-\Phi(\lambda t)]^m\psi(t;\gamma)dt}$$

$$= \frac{[\Phi(\lambda x)]^n[1-\Phi(\lambda x)]^m\psi(x;\gamma)}{\int_{-\infty}^{+\infty}[\Phi(\lambda t)]^n[1-\Phi(\lambda t)]^m\psi(t;\gamma)dt}$$

$$= \frac{[\Phi(\lambda x)]^n[1-\Phi(\lambda x)]^m\psi(x;\gamma)}{c_{n,m}(\gamma,\lambda)}$$

با استفاده از لم‌های ٤ تا ٦می‌توان از توزیع چوله t-نرمال تعمیم یافته داده تولید کرد. شکل ٢ نمودار توزیع GStN(5,3,7,3) و هیستوگرام ١٠٠٠٠ مقدار تولید شده از این توزیع را با استفاده از لم ٤ نشان می‌دهد. چنان‌که ملاحظه می‌شود، هیستوگرام مقادیر تولید شده به‌خوبی بر نمودار توزیع منطبق است.



شکل٢. نمودار تابع چگالی و هیستوگرام مقادیر تولید شده از $GStN(\gamma,\lambda,n,m)$

[Downloaded from jsci.khu.ac.ir on 2026-09-28]

مدل‌بندی میزان آلودگی تالاب شادگان به فلز نیکل

حمل و نقل و بسیاری از فعالیت‌های صنعتی مرتبط با نفت خام منابعی از آلودگی عمومی در بسیاری از بخش‌های جهان از جمله خلیج فارس هستند. نابودی پایانه‌ها و آسیب دیدن تانکرهای نفتی در ادامهٔ اشغال کویت توسط عراق در سال ۱۹۹۱موجب آزاد شدن مقدار زیادی نفت خام در ناحیه خلیج فارس شد. تالاب شادگان با مساحتی بالغ بر۲۹٦ هزار هکتار در جنوب غربی ایران و در راس خلیج فارس قرار دارد. بارش باران سیاه و ته‌نشینی گرده‌های حاصل از سوختن نفت سیاه کویت، باعث آلودگی بسیاری از بخش‌های ایران از جمله تالاب شادگان شد. از جمله مهم‌ترین فلزات سنگین موجود در نفت خام فلز نیکل است. در این بخش به مدل‌بندی داده‌های حاصل از بررسی میزان آلودگی تالاب شادگان به فلز نیکل، که شاخص‌های توصیفی آن‌ها در جدول ۱ ارائه شده‌اند پرداخته می‌شود.

جدول۱. مقادیر شاخص‌ای توصیفی داده‌های آلودگی به فلز نیکل

ضریب کشیدگی	ضریب چولگی	انحراف استاندارد	میانگین	تعداد
۰/٦۰۳	۱/۲۹۷	۲۸/۲٤٤	۲۸/۷٤٤	۱٦۸

چنان‌که ملاحظه می‌شود، ضرایب چولگی و کشیدگی بیان‌گر نامتقارن بودن توزیع داده‌ها هستند. لذا اقدام به برازش توزیع‌های چوله نرمال، چوله t- نرمال و تعمیم توزیع چوله t-نرمال به داده‌ها کرده و نیکویی برازش آن‌ها را با یک‌دیگر مقایسه می‌کنیم. مقادیر آماره کلموگروف اسمیرنوف و معیار

$$AIC = ۲\times(\text{تعداد پارامترها}) - ۲\times(\text{مقدار تابع لگاریتم درستنمایی})$$

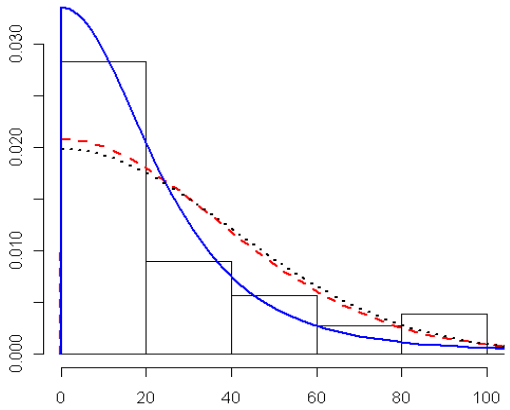
برای داده‌های فلز نیکل و توزیع‌های SN، StN و GStN در جدول ۲ ارائه شده‌اند.

جدول۲. مقادیر آماره کلموگروف- اسمیرنوف (K.S.S) و معیار AIC

شاخص	توزیع		
	SN	StN	GStN
K.S.S	۰/۱۹٦۸	۰/۱۹۵۵	۰/۱۰۵۳
AIC	-۱۴۸۷/۲۹	-۱۴۸٦/۱۴٦	-۱٤۸٥/٤۳

شکل ۳ نیز هیستوگرام داده‌های آلودگی فلز نیکل را به‌همراه نمودار توزیع‌های چوله نرمال، چوله t- نرمال و تعمیم توزیع چوله t-نرمال را نمایش می‌دهد. چنان‌که ملاحظه می‌شود نمودار توزیع چوله t-نرمال تعمیم یافته به هیستوگرام داده‌ها نزدیک‌تر است. از طرفی با مقایسهٔ مقادیر شاخص آزمون کلموگروف اسمیرنوف با مقدار بحرانی، برازش توزیع GStN در سطح $\alpha=$ ۰.۰۱ معنی‌دار است ولی برازش توزیع‌های StN و SN معنی‌دار نیستند.

[Downloaded from jsci.khu.ac.ir on 2026-09-28]



شکل ۳. هیستوگرام داده‌های آلودگی فلز نیکل و نمودار توزیع‌های SN (نقطه چین) StN (خط چین) و GStN (خط ممتد) برازش شده به داده‌ها

از طرفی معیار AIC مقدار بزرگ‌تری برای توزیع GStN اختیار کرده است. بنا بر این توزیع GStN برازش محتمل‌تری نسبت به توزیع‌های SN و StN به داده‌های آلودگی فلز نیکل دارد. برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای توزیع GStN در جدول ۳ ارائه شده است.

جدول ۳. برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای توزیع GStN

پارامتر	m	n	ω	ξ	λ	γ
برآورد	۰	۳	۲۱/۷۹۱	-۰/۰۰۲	۱۶۸٤٦۸٦	۳

معمولاً در تحقیقات علوم‌زیستی آستانه خطرزایی فلز نیکل در رسوبات Mg/l ۲۵ در نظر گرفته می‌شود. احتمال آلودگی خطرزای فلز نیکل در تالاب شادگان حاصل از مدل‌بندی انجام شده با توزیع چوله t- نرمال تعمیم یافته $P(Ni \geq 25) \approx$ ۰/۳۳ و براساس داده‌های نمونه ۰/۳۸ است. چنان‌چه از توزیع StN برای مدل‌بندی داده-ها استفاده شود، احتمال آلودگی خطرزای فلز نیکل ۰/۵۲ حاصل می‌شود. نزدیک‌تر بودن مقادیر حاصل از توزیع برازش یافته به نتایج حاصل از داده‌های نمونه‌ای در مقایسه این نتایج برای توزیع StN، می‌تواند حاکی از نیکویی بهتر برازش مدل به داده‌ها باشد.

بحث و نتیجه‌گیری

علاوه بر تعمیم‌هایی که در منابع برای توزیع چوله t-نرمال ارائه شده است، تعمیمی جدید مطرح و ویژگی‌های آن و نحوهٔ تولید مقادیر تصادفی از آن بررسی شد. این توزیع به‌دلیل دارا بودن دو پارامتر اضافی نسبت به توزیع چوله t-نرمال از انعطاف بیش‌تری در مدل‌بندی داده‌های چوله برخوردار است. چنان‌که در مثال کاربردی نشان داده شد، تعمیم ارائه شده در این مقاله برای توزیع چوله t-نرمال برازش بهتری به داده‌ها نسبت به توزیع‌های چوله نرمال و چوله t-نرمال دارد و رفتار داده‌ها را دقیق‌تر مدل‌بندی می‌کند. با توجه به تعمیم‌های

[Downloaded from jsci.khu.ac.ir on 2026-09-28]

ارائه شده برای توزیع چوله نرمال، انتظار می‌رود تعمیم‌هایی دیگری برای توزیع چوله t-نرمال قابل طرح باشند که بررسی آن‌ها و به خصوص تعمیم نتایج برای حالت چند متغیره می‌تواند موضوع پژوهش‌های بیش‌تر قرار گیرد.

قدردانی و تشکر

نویسندگان از داوران محترم مجله که نظرات ارزنده آن‌ها موجب بهبود مقاله گردید و از همکاری جناب آقای دکتر حسن زارع در ارائه و توضیح داده‌های مثال کاربردی صمیمانه تشکر می‌کنند. از حمایت قطب علمی داده‌های ترتیبی و فضایی دانشگاه فردوسی مشهد نیز قدردانی می‌شود.

منابع

۱. خردمندی، آ. و سنجری، ف. ن.، *ویژگی های توزیع چوله -t نرمال و مدل بندی داده‌های آلودگی تالاب شادگان*، مجله علوم آماری، جلد ۳، شماره ۱ (۱۳۸۸) ۴۷-۵۸.

2. A. Azzalini, "A class of distribution which includes the normal ones", Scandinavian Journal of Statistics, 12 (1985) 171-178.
3. N. A. Henze, "A probabilistic representation of the skew-normal distribution", Scandinavian Journal of Statistics, 13 (1986) 271-275.
4. A. Azzalini, A. Dalla Valla, "The multivariate skew-normal distribution", Biometrika, 83, (1996) 715-726.
5. L. Wang, J. Boyer, M. G. Genton, "A skew-symmetric representation of multivariate distributions", Statistica Sinica, 14 (2004) 1259-1270.
6. M. Branco, D. K. Dey, "A general class of multivariate elliptical distribution", Journal of Multivariate Analysis., 79 (2001) 99-113.
7. B. C. Arnold, R. J. Beaver," Skewed multivariate models related to hidden truncation and/or selective reporting", Test, 11 (2002) 7-54.
8. A. Azzalini, M. Chiogna, "Some results on the stress-strength model for skew normal variate", Metron LXII (2004) 315-326.
9. H. W. Gomez, O. Venegas, H. Bolfarine, "Skew-symmetric distributions generated by the distribution function of the normal distribution", Environmetrics. 18 (2007) 395-407.
10. J. G. Lin, F. C. Xie, B. C. Wei, "Statistical diagnostics for skew-t-normal nonlinear models", Communication in Statistics, Simulation and Computation, 38 (2009) 2096-2110.

[Downloaded from jsci.khu.ac.ir on 2026-09-28]

11. A. Kheradmandi, M. Mohammadzadeh, F. N. Sanjari, "Generalizations of the skew t-Normal distribution and their properties", Journal of Sciences, Islamic Repoblic of Iran, 21, (2010) 343-351.

12. I. Yadegari, A. Gerami, M. J. Khaledi, "A Generalization of the Balakrishnan Skew-normal Distribution", Statistics and Probability Letters, 78 (2008) 1165-1167.

[Downloaded from jsci.khu.ac.ir on 2026-09-28]