

مقایسه دو روش برای حل یک مسئله معکوس سهموی با پارامتر کنترلی

سهیلا بداعی و *علی مردان شاه‌رضایی:

دانشگاه الزهرا (س)، دانشکده علوم پایه

چکیده

در این مقاله با ارائه دو روش به حل عددی یک مسئله معکوس سهموی با پارامتر کنترلی می‌پردازیم. در روش اول ابتدا به کمک تبدیلات معکوس‌پذیر، مسئله سهموی مورد نظر را استاندارد کرده و سپس به وسیله روش تفاضلات متناهی ضمنی به حل مسئله استاندارد حاصل اقدام می‌کنیم. در روش دوم با به‌کارگیری شرط کرانه‌ای فوق اضافی انتگرالی، پارامتر کنترلی را از مسئله حذف کرده و در نهایت مسئله تبدیل یافته را حل می‌کنیم. در پایان با ارائه چند مثال به مقایسه این دو روش می‌پردازیم.

مقدمه

مسئله سهموی ناهمگن:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + p(t)u(x, t) + f(x, t); & 0 < x < 1, & 0 < t \leq T, & (1) \\ u(x, 0) = \varphi(x); & 0 < x < 1, & & (2) \\ u_x(0, t) = g_1(t); & & 0 < t \leq T, & (3) \\ Bu(1, t) = g_2(t); & & 0 < t \leq T, & (4) \end{cases}$$

با شرط کرانه‌ای فوق اضافی:

$$\int_0^{s(t)} u(x, t) dx = E(t); \quad 0 < s(t) \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

که در آن توابع $f, \varphi, g_1, g_2, E > 0$ و s معلوم و توابع u و p مجهول و T عدد مثبت و معین و همچنین B عملگر مشتق یعنی $B = \frac{\partial^n}{\partial x^n}; n = 0, 1$ است، را در نظر می‌گیریم. پدیده‌های فیزیکی بسیاری به وسیله مسئله

(۱) تا (۵) مدل‌بندی می‌شوند. به‌عنوان مثال اگر $u(x, t)$ معرف توزیع دما باشد، مسئله (۱) تا (۵) را می‌توان به‌عنوان یک مسئله کنترلی با پارامتر کنترلی $p(t)$ در نظر گرفت [۱]. مسئله فوق یک مسئله معکوس است. برای شرط کرانه‌ای (۴)، دو حالت وجود دارد. در حالت اول شرط کرانه‌ای به‌صورت $u(1, t) = g_2(t)$ و در حالت دوم به‌شکل $u_x(1, t) = g_2(t)$ است. در ادامه به حل عددی هر دو حالت مسئله مذکور می‌پردازیم. قضایای وجود و یکتایی جواب برای مسئله (۱) تا (۵) به راحتی از مرجع [۲] یافت می‌شود.

واژه‌های کلیدی: مسئله معکوس سهموی، پارامتر کنترلی، شرط فوق اضافی انتگرالی، روش تفاضلات متناهی ضمنی، مسئله تبدیل

یافته، روش مستقیم.

پذیرش ۹۰/۸/۱۱

دریافت ۸۹/۰۵/۲۶

*نویسنده مسئول

مسئله مذکور و مسائل مشابه را، که در آن‌ها به یافتن تابع کنترلی $p(t)$ می‌پردازیم، محققان بسیاری بررسی کرده‌اند [۱]، [۲]، [۳]، [۴]. بخش بعدی این مقاله به کاربردهای فیزیکی این مسئله اختصاص داشته و در بخش‌های ۳ و ۴ به ترتیب به بررسی دو روش برای حل این مسئله می‌پردازیم. وانگ و لین روش اول را پیشنهاد کرده‌اند. در این روش ابتدا مسئله غیراستاندارد (۱) تا (۵) را به کمک دو تبدیل استاندارد کرده و سپس آن را به روش تفاضلات متناهی ضمنی حل می‌کنیم [۳]. در روش دوم به حل مستقیم مسئله غیراستاندارد (۱) تا (۵) می‌پردازیم و در نهایت در بخش ۵، با ارائه مثال‌هایی به مقایسه آن‌ها می‌پردازیم.

کاربردهای فیزیکی

بسیاری از پدیده‌های فیزیکی به وسیله معادلات با مشتقات جزئی سهموی با شرط کرانه‌ای انتگرالی مدل‌بندی می‌شوند. از جمله این مسائل می‌توان به نظریه کنترل، مسائل پزشکی، فرآیندهای شیمیایی و زیستی اشاره کرد [۵]. در این مقاله به اجمال به بررسی چند کاربرد از این گونه مسائل می‌پردازیم. شرط کرانه‌ای:

$$\int_0^b u(x, t) dx = E(t); \quad 0 < b \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T,$$

در مسائل مختلف، جرم یا انرژی را تعیین می‌کند. مثلاً اگر در یک فرآیند هدایت گرمایی، u معرف دما باشد آن‌گاه سیگنال الکتریکی تولید شده به وسیله این ماده متناسب با $\int_0^{S(t)} u(x, t) dx$ یعنی جرم ماده است. حال اگر $p(t)$ را منبع نور در نظر بگیریم، این مسئله را می‌توان به صورت (۱) تا (۵) مدل‌بندی کرد [۲]. از جمله کاربردهای مسئله (۱) تا (۵) در طبیعت می‌توان به فرآیند فتوسنتز در برگ‌ها و همچنین نفوذ در بافت‌های بدن اشاره کرد:

فرآیند فتوسنتز در برگ‌ها شامل زنجیره‌ای از واکنش‌های شیمیایی و فتوشیمیایی است که در نهایت منجر به تولید قند می‌شود. نفوذ و مصرف CO_2 در مزوفیل با یک معادله با مشتقات جزئی سهموی مدل‌بندی می‌شود [۶]. در بسیاری از کاربردهای پزشکی و زیستی، انتقال جرم به وسیله نفوذ در بافت‌ها عملی می‌شود. از جمله این بافت‌ها می‌توانیم بافت مغز را نام ببریم. نفوذ جرم در بافت مغز با معادله سهموی نشان داده می‌شود [۷].

روش استانداردسازی برای حل مسئله (۱) تا (۵)

در این روش ابتدا به کمک تبدیلات:

$$r(t) = e^{-\int_0^t p(\tau) d\tau}, \quad (۶)$$

و

$$v(x, t) = r(t)u(x, t), \quad (۷)$$

مسئله (۱) تا (۵) را استاندارد می‌کنیم. برای حالت اول و دوم به ترتیب داریم:

$$\begin{cases} v_t(x, t) = v_{xx}(x, t) + f(x, t)r(t); & 0 < x < 1, & 0 < t \leq T, \\ v(x, 0) = \varphi(x); & 0 < x < 1, & \\ v_x(0, t) = u_x(0, t)r(t) = g_1(t)r(t); & & 0 < t \leq T, \\ v(1, t) = u(1, t)r(t) = g_2(t)r(t); & & 0 < t \leq T, \\ \int_0^{s(t)} v(x, t) dx = E(t)r(t); & 0 < s(t) \leq 1, & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (8)$$

و

$$\begin{cases} v_t(x, t) = v_{xx}(x, t) + f(x, t)r(t); & 0 < x < 1, & 0 < t \leq T, \\ v(x, 0) = \varphi(x); & 0 < x < 1, & \\ v_x(0, t) = u_x(0, t)r(t) = g_1(t)r(t); & & 0 < t \leq T, \\ v_x(1, t) = u_x(1, t)r(t) = g_2(t)r(t); & & 0 < t \leq T, \\ \int_0^{s(t)} v(x, t) dx = E(t)r(t); & 0 < s(t) \leq 1, & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (9)$$

حال به کمک طرح تفاضلات متناهی ضمنی به حل مسائل استاندارد شده اخیر می پردازیم. بدین منظور بازه های $[0, 1]$ و $[0, T]$ را به ترتیب به M و N زیربازه با طول گام های $h = \frac{1}{M}$ و $\tau = \frac{T}{N}$ تقسیم می کنیم. به

این ترتیب داریم:

$$x_j = jh, \quad t_n = n\tau.$$

از این رو توابع شبکه های را بدین صورت تعریف می کنیم:

$$u_j^n = u(x_j, t_n), \quad v_j^n = v(x_j, t_n), \quad f_j^n = f(x_j, t_n),$$

و همچنین داریم:

$$p^n = p(t_n), \quad r^n = r(t_n).$$

در روابط اخیر برای مسئله (۸)، $0 \leq j \leq M - 1$ و $0 \leq n \leq N$ و برای مسئله (۹)، $0 \leq j \leq M$ و $0 \leq n \leq N$ هستند. سپس نقطه $x = -h$ را برای تولید نقاط خارجی مورد نیاز شرط کرانه ای مسئله (۸) و نقاط $x = -h$ و $x = (M + 1)h$ را برای تولید نقاط خارجی مورد نیاز برای شرط کرانه ای نوع دوم مسئله (۹) به بازه $[0, 1]$ می افزاییم. روش تفاضلات متناهی ضمنی با به کار بردن روش اویلر پسرو برای قسمت زمانی و روش تفاضل مرکزی برای قسمت مکانی به دست می آید که دارای خطای قطع موضعی $O(\tau + h^2)$ است و پایدار مطلق است [۸].

روش تفاضلات متناهی ضمنی برای مسائل (۸) و (۹) به ترتیب، بدین صورت است:

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau}(v_j^{n+1} - v_j^n) = \frac{1}{h^2}(v_{j-1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j+1}^{n+1}) + r^{n+1}f_j^{n+1}, \\ v_j^0 = \varphi_j, \\ v_{-1}^n = v_1^n - 2hr^n g_1(t_n), \\ v_M^n = r^n g_2(t_n), \end{cases} \quad (10)$$

و

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau}(v_j^{n+1} - v_j^n) = \frac{1}{h^2}(v_{j-1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j+1}^{n+1}) + r^{n+1}f_j^{n+1}, \\ v_j^0 = \varphi_j, \\ v_{-1}^n = v_1^n - 2hr^n g_1(t_n), \\ v_{M+1}^n = v_{M-1}^n + 2hr^n g_2(t_n), \end{cases} \quad (11)$$

و برای شرط فوق اضافی انتگرالی مسائل (۸) و (۹) می‌یابیم:

$$r(t_n) = \frac{1}{E(t_n)} \int_0^{s(t_n)} v(x, t_n) dx. \quad (12)$$

با تقریب عبارت انتگرالی اخیر به وسیله قاعده ذوزنقه‌ای نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \int_0^{s(t_n)} v(x, t_n) dx &= \int_0^{kh} v(x, t_n) dx + \int_{kh}^{s(t_n)} v(x, t_n) dx \\ &= h \left[\frac{v(x_0, t_n)}{2} + v(x_1, t_n) + \dots + v(x_{k-1}, t_n) + \frac{v(x_k, t_n)}{2} \right] + \int_{kh}^{s(t_n)} v(x, t_n) dx. \end{aligned}$$

به کمک درون‌یاب پیش‌رو نیوتن داریم:

$$\int_{kh}^{s(t_n)} v(x, t_n) dx = \left(\delta(t_n) - \frac{\delta^2(t_n)}{2h} \right) v(x_k, t_n) + \frac{\delta^2(t_n)}{2h} v(x_{k+1}, t_n), \quad (13)$$

که در آن $\delta(t_n) = s(t_n) - k(t_n)h$ و $k(t_n) = \lfloor \frac{s(t_n)}{M} \rfloor$. حال با توجه به دو رابطه اخیر داریم:

$$\begin{aligned} \int_0^{s(t_n)} v(x, t_n) dx &= h \left[\frac{v(x_0, t_n)}{2} + v(x_1, t_n) + \dots + v(x_{k-1}, t_n) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2} + \frac{\delta(t_n)}{h} - \frac{\delta^2(t_n)}{2h^2} \right) v(x_k, t_n) + \frac{\delta^2(t_n)}{2h^2} v(x_{k+1}, t_n) \right]. \end{aligned}$$

با قرار دادن رابطه اخیر در رابطه (۱۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} r(t_n) &= \frac{h}{E(t_n)} \left[\frac{v(x_0, t_n)}{2} + v(x_1, t_n) + \dots + v(x_{k-1}, t_n) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2} + \frac{\delta(t_n)}{h} - \frac{\delta^2(t_n)}{2h^2} \right) v(x_k, t_n) + \frac{\delta^2(t_n)}{2h^2} v(x_{k+1}, t_n) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

با جای‌گذاری رابطه (۱۴) در مسائل (۸) و (۹)، مسائل استاندارد شده (۸) و (۹) حل می‌شود. با حل مسئله

معکوس استاندارد، مقادیر (v, r) را به دست می‌آوریم. حال با داشتن این مقادیر به راحتی از تبدیلات:

$$p(t) = -\frac{r'(t)}{r(t)}, \quad (15)$$

$$u(x, t) = \frac{v(x, t)}{r(t)}, \quad (16)$$

می‌توان زوج جواب (u, p) را به دست آورد. به این ترتیب مسئله معکوس حل می‌شود.

روش مستقیم برای حل عددی مسئله (۱) تا (۵)

برای حل مسئله (۱) تا (۵) به روش مستقیم، ابتدا با استفاده از (۱)، (۳) و (۵) داریم:

$$E'(t) = s'(t)u(s(t), t) + u_x(s(t), t) - g_1(t) + p(t)E(t) + \int_0^{s(t)} f(x, t)dx,$$

و به طور معادل می‌یابیم:

$$p(t) = \frac{E'(t) - s'(t)u(s(t), t) - u_x(s(t), t) + g_1(t) - \int_0^{s(t)} f(x, t)dx}{E(t)} \quad (17)$$

با جای‌گزینی رابطه (17) در معادله (1)، مسئله (1) تا (5) به مسئله زیر منجر می‌گردد:

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) + \\ &\left\{ \frac{E'(t) - s'(t)u(s(t), t) - u_x(s(t), t) + g_1(t) - \int_0^{s(t)} f(x, t)dx}{E(t)} \right\} u(x, t) \\ &+ f(x, t); \quad \begin{matrix} 0 < x < 1, & 0 < t \leq T, \\ 0 \leq x \leq 1, & \end{matrix} \quad (18) \\ u(x, 0) &= \varphi(x); \quad (19) \\ u_x(0, t) &= g_1(t); \quad 0 < t \leq T, \quad (20) \\ Bu(1, t) &= g_2(t); \quad 0 < t \leq T. \quad (21) \end{aligned}$$

در این بخش با استفاده از روش تفاضلات منتهای ضمنی به حل عددی مسئله مستقیم (18) تا (21) می‌پردازیم. مشابه بخش پیش، بازه‌های $[0, 1]$ و $[0, T]$ را به ترتیب به M و N زیربازه با طول گام‌های $h = \frac{1}{M}$ و $\tau = \frac{T}{N}$ تقسیم می‌کنیم. به این ترتیب داریم:

$$x_j = jh, \quad t_n = n\tau.$$

لذا توابع شبکه‌ای را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$u_j^n = u(x_j, t_n), \quad v_j^n = v(x_j, t_n), \quad f_j^n = f(x_j, t_n),$$

و همچنین داریم:

$$p^n = p(t_n), \quad r^n = r(t_n).$$

در روابط اخیر برای مسئله (8)، $0 \leq j \leq M-1$ و $0 \leq n \leq N$ و برای مسئله (9)، $0 \leq j \leq M$ و $0 \leq n \leq N$ هستند. بدین ترتیب روش تفاضلات منتهای ضمنی برای این مسئله در حالتی که شرط (21) به صورت $u(1, t) = g_2(t)$ و همچنین در حالتی که شرط مذکور به شکل $u_x(1, t) = g_2(t)$ باشد، به ترتیب بدین صورت است:

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau}(u_j^{n+1} - u_j^n) = \frac{1}{h^2}(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}) + a(u(s(t_n), t_n))u_j^{n+1} + f_j^{n+1}, \\ u_j^0 = \varphi_j, \\ u_{-1}^n = u_1^n - 2hg_1(t_n), \\ u_M^n = g_2(t_n), \end{cases} \quad (22)$$

و

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau}(u_j^{n+1} - u_j^n) = \frac{1}{h^2}(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}) + a(u(s(t_n), t_n))u_j^{n+1} + f_j^{n+1}, \\ u_j^0 = \varphi_j, \\ u_{-1}^n = u_1^n - 2hg_1(t_n), \\ u_{M+1}^n = u_{M-1}^n + 2hg_2(t_n). \end{cases} \quad (23)$$

در مسائل (22) و (23) داریم:

$$a(u(s(t_n), t_n)) = \frac{E'(t_n) - s'(t_n)u(s(t_n), t_n) - u_x(s(t_n), t_n) + g_1(t_n) - \int_0^{s(t_n)} f(x, t_n) dx}{E(t_n)}$$

با توجه به چگونگی قرار گرفتن $s(t_n)$ بر روی محور مختصات برای $u(s(t_n), t_n)$ و $a(u(s(t_n), t_n))$ در معادله اخیر به ازای هر $0 \leq n \leq N$ دو حالت داریم:

حالت اول: اگر $s(t_n)$ یکی از نقاط گرهی باشد یعنی:

$$s(t_n) = x_j; \quad 0 \leq j \leq M,$$

آن‌گاه

$$u(s(t_n), t_n) = u_j^n.$$

حالت دوم: اگر $s(t_n)$ نقطه گرهی نباشد و $x_0 < s(t_n) < x_M$ آن‌گاه عدد صحیحی مثل $k = \lfloor \frac{s(t_n)}{h} \rfloor$ وجود دارد به طوری که $x_k < s(t_n) < x_{k+1}$ و همچنین x_k و x_{k+1} نقاط گرهی هستند. در این حالت به کمک درونیابی لاگرانژ در نقاط x_k و x_{k+1} خواهیم داشت:

$$u(s(t_n), t_n) = \frac{(k+1)h - s(t_n)}{h} u_k^n - \frac{kh - s(t_n)}{h} u_{k+1}^n,$$

و

$$u_x(s(t_n), t_n) = \left(\frac{(k+1)h - s(t_n)}{h} \right) \left(\frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{2h} \right) - \left(\frac{kh - s(t_n)}{h} \right) \left(\frac{u_k^n - u_{k-1}^n}{2h} \right).$$

از مسئله (۲۲) به دستگاه $M \times M$ زیر می‌رسیم:

$$A_1 U^{n+1} = U^n + B_1, \quad (24)$$

که در آن A_1 ماتریسی سه قطری و B_1 ماتریسی ستونی و بردار جواب U^n به ترتیب بدین صورت است:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \frac{-2\tau}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{-\tau}{h^2} & \tilde{a} & \frac{-\tau}{h^2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \frac{-\tau}{h^2} & \tilde{a} & \frac{-\tau}{h^2} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{-\tau}{h^2} & \tilde{a} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2\tau}{h} g_1^{n+1} + \tau f_0^{n+1} \\ \tau f_1^{n+1} \\ \vdots \\ \tau f_{M-2}^{n+1} \\ \frac{2\tau}{h^2} g_2^{n+1} + \tau f_{M-1}^{n+1} \end{pmatrix}, \quad U^n = (u_0^n, u_1^n, \dots, u_{M-1}^n)^T.$$

و مسئله (۲۳) به دستگاه $(M+1) \times (M+1)$ زیر منجر می‌شود:

$$AU^{n+1} = U^n + B. \quad (25)$$

در دستگاه اخیر A ماتریسی سه قطری و B ماتریسی ستونی بدین صورت است:

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \frac{-2\tau}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{-\tau}{h^2} & \tilde{a} & \frac{-\tau}{h^2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \frac{-\tau}{h^2} & \tilde{a} & \frac{-\tau}{h^2} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{-2\tau}{h^2} & \tilde{a} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{2\tau}{h} g_1^{n+1} + \tau f_0^{n+1} \\ \tau f_1^{n+1} \\ \vdots \\ \tau f_{M-1}^{n+1} \\ \frac{2\tau}{h} g_2^{n+1} + \tau f_M^{n+1} \end{pmatrix}.$$

بردار جواب U^n بدین صورت تعریف می‌شود:

$$U^n = (u_0^n, u_1^n, \dots, u_M^n)^T.$$

شایان ذکر است که در ماتریس‌های A و A_1 داریم:

$$\tilde{a} = 1 + \frac{2\tau}{h^2} - \tau a(u(s(t_n), t_n)).$$

با حل دستگاه‌های (۲۴) و (۲۵) به روش حذفی گاوس با محورگیری ستونی می‌توانیم همه مقادیر u_j^{n+1} را به ازای $j = 0, 1, \dots, M$ به دست آوریم. با در دست داشتن مقادیر u می‌توان از رابطه (۱۷)، $p(t)$ را به دست آورد. به این طریق مسئله معکوس مورد نظر حل می‌شود. لازم به ذکر است طرح‌های تفاضلی (۲۴) و (۲۵) پایدار و سازگار هستند و مرتبه همگرایی آن‌ها $O(\tau + h^2)$ هستند [۸].

نتایج عددی

مثال ۱. مسئله معکوس زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) + p(t)u(x, t) + (\pi^2 + 2t)e^t \cos \pi x + 2e^t x t; \\ 0 < x < 1, & \quad 0 < t \leq 1, \\ u(x, 0) &= x + \cos \pi x; & \quad 0 < x < 1, \\ u_x(0, t) &= e^t; & \quad 0 < t \leq 1, \\ u(1, t) &= 0; & \quad 0 < t \leq 1, \\ \int_0^{\frac{1+t}{2}} u(x, t) dx &= e^t \left\{ \frac{1}{\pi} \sin \left(\frac{\pi(1+t)}{2} \right) + \frac{(1+t)^2}{8} \right\}; & \quad 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

جواب واقعی این مسئله عبارت است از:

$$u(x, t) = e^t(x + \cos \pi x),$$

و

$$p(t) = 1 - 2t.$$

با حل این مسئله مطابق روش‌هایی که شرح دادیم و با انتخاب $h = 0.01$ و $\tau = 0.001$ داریم:

جدول ۱. مقادیر دقیق و تقریبی $p(t)$

| t | مقدار واقعی $p(t)$ | مقدار $p(t)$ در روش دوم | مقدار $p(t)$ در روش اول |
|-----|--------------------|-------------------------|-------------------------|
| 0.1 | 0.8 | 0.79871074762088 | 0.79525486819271 |
| 0.2 | 0.6 | 0.59871074762088 | 0.59426328254142 |
| 0.3 | 0.4 | 0.39857045137511 | 0.39371166295291 |
| 0.4 | 0.2 | 0.19843058344622 | 0.19344496485992 |
| 0.5 | 0.0 | -0.0017537688877 | -0.00651316348892 |
| 0.6 | -0.2 | -0.2019831631773 | -0.20614115729867 |
| 0.7 | -0.4 | -0.4022583261365 | -0.40543513439588 |
| 0.8 | -0.6 | -0.6025801288717 | -0.60440827007286 |

جدول ۲. مقادیر دقیق و تقریبی $u(x, 0.5)$

| x | مقدار واقعی $u(x, 0.5)$ | مقدار $u(x, 0.5)$ در روش دوم | مقدار $u(x, 0.5)$ در روش اول |
|-----|-------------------------|------------------------------|------------------------------|
| 0.1 | 1.73289923512380 | 1.72845865635990 | 1.73298618202859 |
| 0.2 | 1.66358778112389 | 1.65943613294258 | 1.66366345353824 |
| 0.3 | 1.46371042926848 | 1.46001691033510 | 1.46376915475728 |
| 0.4 | 1.16897139991385 | 1.16586438648478 | 1.16900974601668 |
| 0.5 | 0.82436063535006 | 0.82191404144753 | 0.82437787304813 |
| 0.6 | 0.47974987078648 | 0.47797640965759 | 0.47974823185266 |
| 0.7 | 0.18501084143165 | 0.18386278121632 | 0.18499554635519 |
| 0.8 | -0.0148665104237 | -0.01548910667503 | -0.0148874533176 |

مثال ۲. معادله سهموی:

$$u_t = u_{xx} + p(t)u + (1 - \pi^2)e^{-t^2} \sin \pi x + 2t - 1; \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 1,$$

با شرایط اولیه و کرانه‌ای

$$u(x, 0) = 1 - \sin(\pi x); \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u_x(0, t) = -\pi e^{-t^2}; \quad 0 < t \leq 1,$$

$$u_x(1, t) = \pi e^{-t^2}; \quad 0 < t \leq 1,$$

$$\int_0^{\frac{1+t}{2}} u(x, t) dx = \frac{1+t}{2} + \frac{e^{-t^2}}{\pi} \left[\cos\left(\frac{\pi(1+t)}{2}\right) - 1 \right]; \quad 0 \leq t \leq 1,$$

را در نظر می‌گیریم. جواب واقعی این مسئله عبارت است از:

$$u(x, t) = 1 - e^{-t^2} \sin(\pi x),$$

و

$$p(t) = 1 - 2t.$$

با انتخاب $h = 0/01$ و $\tau = 0/005$ برای برخی نقاط انتخابی داریم:جدول ۳. مقادیر دقیق و تقریبی $p(t)$

| t | مقدار واقعی $p(t)$ | مقدار $p(t)$ در روش دوم | مقدار $p(t)$ در روش اول |
|-----|--------------------|-------------------------|-------------------------|
| 0.1 | 0.8 | 0.79799367677964 | 0.785156525952651 |
| 0.2 | 0.6 | 0.59631163618863 | 0.587713213761857 |
| 0.3 | 0.4 | 0.39534231109724 | 0.389687053612913 |
| 0.4 | 0.2 | 0.19494135537158 | 0.191054582901252 |
| 0.5 | 0.0 | -0.00504968266941 | 0.008120809810522 |
| 0.6 | -0.2 | -0.2047745649556 | -0.020774672861942 |
| 0.7 | -0.4 | -0.4043434922786 | -0.40773739643491 |
| 0.8 | -0.6 | -0.6038349518775 | -0.60802627480856 |

جدول ۴. مقادیر دقیق و تقریبی $u(x, 0.5)$

| x | مقدار واقعی $u(x, 0.5)$ | در روش دوم $u(x, 0.5)$ | در روش اول $u(x, 0.5)$ |
|-----|-------------------------|------------------------|------------------------|
| 0.1 | 0.75933732279842 | 0.75309529443821 | 0.75928890771779 |
| 0.2 | 0.54223238523680 | 0.53679335339898 | 0.54217868868552 |
| 0.3 | 0.36993693126272 | 0.36506187818097 | 0.36988801862598 |
| 0.4 | 0.25931644036417 | 0.25477589234399 | 0.25927369803537 |
| 0.5 | 0.22119921692860 | 0.21676951911709 | 0.22115839217381 |
| 0.6 | 0.36993693126272 | 0.25477589234399 | 0.25927369803537 |
| 0.7 | 0.3699363126272 | 0.36506187818097 | 0.36988801862598 |
| 0.8 | 0.54223238523680 | 0.53679335339898 | 0.54217185400738 |

که اعداد جداول فوق با نرم افزار matlab تا (14D) محاسبه شده‌اند.

نتیجه‌گیری

چنان‌که در مثال‌های اخیر مشاهده کردیم در حالتی که شرط کرانه‌ای مسئله نوع دوم (نیومن) است، از روش دوم تقریب بهتری برای $p(t)$ و از روش اول تقریب بهتری برای $u(x, 0.5)$ حاصل می‌شود. همچنین در حالتی که شرط کرانه‌ای مسئله نوع سوم (آمیخته) است، روش اول از خطای کمتری برخوردار است. در حالت کلی می‌توان گفت، روش دوم از جهت حجم کم عملیات نسبت به روش اول ارجحیت دارد.

منابع

1. J. R. Cannon, S. H. Wang and Y. Lin, "Determination of a control function in a parabolic partial differential equation", Appl. Math. Comput. 132 (2002) 299-313.
2. J. R. Cannon, "The One Dimensional Heat Equation", Addison-Wesley, Publishing Company, California (1984).
3. Sh. Wang and Y. Lin, "A finite difference solution to an inverse problem for determining a control function in a parabolic partial differential equation", Inverse Problems, 5 (1989) 631-640.
4. Sh. Wang and Y. Lin, "An inverse problem of finding a source parameter in a semilinear parabolic equation", Appl. Math., Model, 25 (2001) 743-754.
5. Murthy ASV, J. G Verwer, "Solving parabolic integro-differential equations by an explicit integration method", J. Comput. Appl. Math. 39 (1992) 121-132.
6. A. A. Luushinkov, T. Ahonen, T. Vesala, E. Juuroola, E. Nikinmaa and P. Hari, "Modelling of light-driven RUBP regeneration carboxylation and CO_2 diffusion for leaf photosynthesis", J. Theor. Biol. 188 (1997) 143-151.

7. A. R. A Khaled and K.Vafai, "The role of porous media in modeling flow and heat transfer in biological tissues", J. Heat Mass Transfer, 46 (2003) 4989-5003.
8. L. Lapidus, G. F. Pinder, "Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering", Wiley, New York (1982).