بعضی چندجمله‌ایهای تحویل‌ناپذیر بر روی Q

حسین صدیقی
عضو هیأت علمی دانشگاه تربیت معلم

چکیده

هدف این مقاله یافتن دسته‌هایی از چندجمله‌ایهای عضو $Q[x]$ است که روی Q تحویل‌ناپذیرند و در پایان شبکه‌ای از زیرگروههای یک چندجمله‌ای روی Q و شبکه‌ای از زیرمیدانهای میدان تجزیه‌ای آن چندجمله‌ای روی Q جهت مقایسه این دو شبکه رسم شده است.

چنانچه E/F یک میدان توسیعی و $\alpha \in E$ روی F جبری باشد آنگاه تابع

$$\begin{aligned} \phi_\alpha \ : \ & F[x] \longrightarrow F(\alpha) \\ & f(x) \rightsquigarrow f(\alpha) \end{aligned}$$

یک همریختی است. با توجه به جبری بودن α روی F هسته این همریختی یک ایده‌آل ناصفر $F[x]$ است که به‌وسیلهٔ یک چندجمله‌ای تکین تحویل‌ناپذیر منحصر بفرد $p(x) \in F[x]$ تولید می‌شود، $p(x)$ را چندجمله‌ای مینیمال یا چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر α روی F می‌نامند و $[F(\alpha) : F] = \deg(p(x))$.

اگر E/F توسیع میدان تجزیه‌ای چندجمله‌ای ناصفر f باشد آنگاه

$$\mathrm{Gal}_F(f) = \{\phi | \phi : E \longrightarrow E \text{یک خودریختی است که هر عضو } F \text{ را ثابت نگه می‌دارد}\}.$$

اگر $H \subseteq \mathrm{Gal}_F(f)$ یک زیرمجموعه دلخواه باشد آنگاه

$$\phi(H) = \{\alpha \in E | \forall \sigma \in H(\sigma(\alpha) = \alpha)\}$$

یک زیرمیدان E می‌باشد که شامل F است. به‌عکس اگر K زیرمیدانی از E و شامل F باشد آنگ
$\{\sigma \in \mathrm{Gal}_F(f) | \forall k \in K(\sigma(k) = k)\}$ زیرگروهی از $\mathrm{Gal}_F(f)$ است. چنانچه:

$$A = \{K | \text{زیرمیدانی از } E \text{ که شامل } F \text{ است } K\},$$
$$B = \{H | \text{یک زیرگروه } \mathrm{Gal}_F(f) \text{ است } H\},$$

آنگاه تابع (۱) $\psi : B \longrightarrow A$ با ضابطهٔ $\psi(H) = \phi(H)$ یک تناظر یک‌به‌یک است.

فرض کنید q, p دو عدد خالی از مربع باشند به قسمی که $q \neq (p,q) \neq p$ و $f = (x^۲ - p)(x^۲ - q)$. د
این صورت $Q(\sqrt{p}, \sqrt{q})/Q$ یک توسیع میدان تجزیه‌ای f است.

$$Q(\sqrt{p}, \sqrt{q}) = \{a_۰ + a_۱\sqrt{p} + a_۲\sqrt{q} + a_۳\sqrt{pq} | a_i \in Q\}$$
$$|\mathrm{Gal}_Q(f)| = [Q(\sqrt{p}, \sqrt{q}) : Q] = ۴.$$

با فرض $\mathrm{Gal}_Q(f) = \{\sigma_۰, \sigma_۱, \sigma_۲, \sigma_۳\}$، هر یک از σ_i، $(۰ \leq i \leq ۳)$ یک خودریختی روی $Q(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ است
که هر عضو Q را ثابت نگهمیدارند. برای مشخص کردن یک خودریختی روی $Q(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ کافی است $\sigma(\sqrt{p})$ و
$\sigma(\sqrt{q})$ را معین نمائیم. از آنجا که $\sigma(\sqrt{p}) = \pm\sqrt{p}$ و $\sigma(\sqrt{q}) = \pm\sqrt{q}$، نتیجه می‌شود که اعضای $\mathrm{Gal}_Q(f)$ به
شرح زیر می‌باشند

$$\sigma_۰ : \begin{cases} \sqrt{p} \longrightarrow \sqrt{p} \\ \sqrt{q} \longrightarrow \sqrt{q} \end{cases}, \quad \sigma_۱ : \begin{cases} \sqrt{p} \longrightarrow -\sqrt{p} \\ \sqrt{q} \longrightarrow \sqrt{q} \end{cases}, \quad \sigma_۲ : \begin{cases} \sqrt{p} \longrightarrow \sqrt{p} \\ \sqrt{q} \longrightarrow -\sqrt{q} \end{cases}, \quad \sigma_۳ : \begin{cases} \sqrt{p} \longrightarrow -\sqrt{p} \\ \sqrt{q} \longrightarrow -\sqrt{q} \end{cases}$$

بنابراین $\mathrm{Gal}_Q(f)$ دارای زیرگروههای

$$H_۰ = \{\sigma_۰\}, \quad H_۱ = \{\sigma_۰, \sigma_۱\}, \quad H_۲ = \mathrm{Gal}_Q(f), \quad H_۳ = \{\sigma_۰, \sigma_۳\}, \quad H_۴ = \{\sigma_۰, \sigma_۲\}.$$

در نتیجه زیرمیدانهای متناظر H_iها بنابر رابطه (۱) که تمام زیرمیدانهای $Q(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ نیز می‌باشند به شرح زیر می‌باشند:

$$\phi(H_۰) = Q(\sqrt{p}, \sqrt{q})$$
$$\phi(H_۱) = Q(\sqrt{q}), \quad \phi(H_۲) = Q(\sqrt{p}, \quad \phi(H_۳) = Q(\sqrt{pq}) \quad \phi(H_۴) = Q,$$

لم ۱: اگر b, a اعداد گویای ناصفر و q, p دو عدد خالی از مربع باشند به قسمی که $q \neq (p,q) \neq p$ آنگاه $\alpha = a\sqrt{p} + b\sqrt{q}$ $Q(\alpha) = Q(\sqrt{p}, \sqrt{q})$.

برهان: چون α به هیچیک از زیرمیدانهای $Q(\sqrt{p})$، $Q(\sqrt{q})$، $Q(\sqrt{pq})$ و Q تعلق ندارد، و $Q(\alpha)$ زیرمیدانی از $Q(\sqrt{p},\sqrt{q})$ است که با هیچیک از این چهار زیرمیدان برابر نیست پس $Q(\alpha)=Q(\sqrt{p},\sqrt{q})$.▲

قضیه ۲: اگر q,p دو عدد صحیح و مثبت و خالی از مربع باشند به قسمی که $q \nmid p$ و $p \nmid q$ و b,a اعداد گویای ناصفر باشند آنگاه چندجمله‌ای $f(x)=x^4-2(a^2p+b^2q)x^2+(a^2p-b^2q)^2$ روی Q تحویل‌ناپذیر است.

برهان: با فرض $\alpha=a\sqrt{p}+b\sqrt{q}$. بنابر لم یک داریم $Q(\alpha)=Q(\sqrt{p},\sqrt{q})$. بنابراین $[Q(\alpha):Q]=[Q(\sqrt{p},\sqrt{q}):Q]=4$. در نتیجه چندجمله‌ای مینیمال α روی Q از درجهٔ ۴ می‌باشد. لذا اگر $g(x)\in Q[x]$ یک چندجمله‌ای ناصفر باشد به قسمی که

$$g(\alpha)=0 \quad \text{آنگاه} \quad \deg(g(x))\geq 4 \qquad (2)$$

$$\alpha=a\sqrt{p}+b\sqrt{q}.$$
$$\alpha^2=a^2p+b^2q+2ab\sqrt{pq}.$$
$$\alpha^2-(a^2p+b^2q)=2ab\sqrt{pq},$$
$$\alpha^4+(a^2p+b^2q)^2-2(a^2p+b^2q)\alpha^2=4a^2b^2pq,$$
$$\alpha^4-2(a^2p+b^2q)\alpha^2+(a^2p-b^2q)^2=0$$

بنابراین α صفر $f(x)$ می‌باشد. از این که چندجمله‌ای مینیمال α در Q از درجه ۴ می‌باشد نتیجه می‌شود که $f(x)$ روی Q تحویل‌ناپذیر است. چه در غیر این صورت α صفر یک چندجمله‌ای از درجهٔ کوچکتر از ۴ روی Q می‌باشد که با (۲) تناقض دارد.▲

نتیجه یک: اگر q,p دو عدد خالی از مربع باشند به قسمی که $q \nmid p$ و $p \nmid q$ آنگاه چندجمله‌ای $g(x)=x^4-2(p+q)x^2+(p-q)^2$ روی Q تحویل‌ناپذیر است.

برهان: با قراردادن $a=b=1$ در قضیه ۲ نتیجه حاصل می‌شود.▲

نتیجه ۲: اگر q,p دو عدد طبیعی خالی از مربع باشند به قسمی که $q \nmid p$ و $p \nmid q$ و a یک عدد گویای ناصفر باشد آنگاه چندجمله‌ای $h(x)=x^4-2(p+q)a^2x^2+a^4(p-q)^2$ روی Q تحویل‌ناپذیر است.

برهان: با قراردادن $a=b$ در قضیه ۲ نتیجه حاصل می‌شود.▲

قضیه ۳: اگر m عددی صحیح و مثبت و مربع کامل نباشد (یعنی عددی اول چون p وجود دارد که $p^k|m$ و $p^{k+1} \nmid m$ و k فرد است) آنگاه چندجمله‌ای $t(x)=x^4-2(m-1)x^2+(m+1)^2$ روی Q تحویل‌ناپذیر است.

برهان: $Q(i,\sqrt{m}) = Q(i+\sqrt{m})$. لذا

$$[Q(i+\sqrt{m}) : Q] = [Q(i,\sqrt{m}) : Q] = ۴$$

بنابراین چندجمله‌ای مینیمال $i+\sqrt{m}$ روی Q از درجهٔ ۴ می‌باشد، در نتیجه اگر $s(x) \in Q[x]$ یک چندجمله‌ای ناصفر باشد به قسمی که $s(i+\sqrt{m}) = ۰$ آنگاه $\deg(s(x)) \geq ۴$. بافرض

$$\alpha = i+\sqrt{m},$$
$$\alpha^۲ = -۱+m+۲i\sqrt{m},$$
$$\alpha^۴ + (۱-m)^۲ + ۲(۱-m)\alpha^۲ = -۴m,$$
$$\alpha^۴ + (۱-m)^۲ + ۲(۱-m)\alpha^۲ = -۴m,$$
$$\alpha^۴ + ۲(۱-m)\alpha^۲ + (m+۱)^۲ = ۰$$

بنابراین α صفر چندجمله‌ای $t(x)$ می‌باشد. در نتیجه $t(x)$ روی Q تحویل‌ناپذیر است چه در غیر این صورت α صفر یک چندجمله‌ای از درجهٔ حداکثر ۳ می‌باشد که غیرممکن است.▲

فرض کنید p، q و t سه عدد اول دوبه‌دو متمایز باشند و $f = (x^۲-p)(x^۲-q)(x^۲-t)$. در این صورت $Q(\sqrt{p},\sqrt{q},\sqrt{t})/Q$ توسیع میدان تجزیه‌ای f روی Q است.

$$Q(\sqrt{p},\sqrt{q},\sqrt{t} = \left\{a+b_۱\sqrt{p}+b_۲\sqrt{q}+b_۳\sqrt{t}+c_۱\sqrt{pq}+c_۲\sqrt{pt}+c_۳\sqrt{qt}+d\sqrt{pqt} | a,b_i,c_i,d \in Q\right\},$$
$$\mathrm{Gal}_Q(f) = \{\sigma_۰,\sigma_۱,\sigma_۲,\sigma_۳,\sigma_۴,\sigma_۵,\sigma_۶,\sigma_۷\}.$$

اگر $\sigma \in \mathrm{Gal}_Q(f)$ آنگاه برای هر $q \in Q$ داریم $\sigma(q) = q$. لذا برای مشخص کردن یک خودریختی $\sigma : Q(\sqrt{p},\sqrt{q},\sqrt{t}) \longrightarrow Q(\sqrt{p},\sqrt{q},\sqrt{t})$ کافی است $\sigma(\sqrt{p})$، $\sigma(\sqrt{q})$ و $\sigma(\sqrt{t})$ را معین کنیم. از آنجا که $\sigma(\sqrt{p}) = \pm\sqrt{p}$ و $\sigma(\sqrt{q}) = \pm\sqrt{q}$ و $\sigma(\sqrt{t}) = \pm\sqrt{t}$، نتیجه می‌شود که ۸ عضو $\mathrm{Gal}_Q(f)$ به شرح زیر است:

$$\sigma_۰ : \begin{cases} \sqrt{p} \longrightarrow \sqrt{p} \\ \sqrt{q} \longrightarrow \sqrt{q} \\ \sqrt{t} \longrightarrow \sqrt{t} \end{cases}, \quad \sigma_۱ : \begin{cases} \sqrt{p} \longrightarrow -\sqrt{p} \\ \sqrt{q} \longrightarrow \sqrt{q} \\ \sqrt{t} \longrightarrow \sqrt{t} \end{cases}, \quad \sigma_۲ : \begin{cases} \sqrt{p} \longrightarrow \sqrt{p} \\ \sqrt{q} \longrightarrow -\sqrt{q} \\ \sqrt{t} \longrightarrow \sqrt{t} \end{cases}, \quad \sigma_۳ : \begin{cases} \sqrt{p} \longrightarrow \sqrt{p} \\ \sqrt{q} \longrightarrow \sqrt{q} \\ \sqrt{t} \longrightarrow -\sqrt{t} \end{cases}$$

$$\sigma_۴ : \begin{cases} \sqrt{p} \longrightarrow -\sqrt{p} \\ \sqrt{q} \longrightarrow -\sqrt{q} \\ \sqrt{t} \longrightarrow \sqrt{t} \end{cases}, \quad \sigma_۵ : \begin{cases} \sqrt{p} \longrightarrow -\sqrt{p} \\ \sqrt{q} \longrightarrow \sqrt{q} \\ \sqrt{t} \longrightarrow -\sqrt{t} \end{cases}, \quad \sigma_۶ : \begin{cases} \sqrt{p} \longrightarrow \sqrt{p} \\ \sqrt{q} \longrightarrow -\sqrt{q} \\ \sqrt{t} \longrightarrow -\sqrt{t} \end{cases}, \quad \sigma_۷ : \begin{cases} \sqrt{p} \longrightarrow -\sqrt{p} \\ \sqrt{q} \longrightarrow -\sqrt{q} \\ \sqrt{t} \longrightarrow -\sqrt{t} \end{cases}$$

$$[Q(\sqrt{p},\sqrt{q},\sqrt{t}):Q]=|\operatorname{Gal}_Q(f)|=۸.$$

لذا $\operatorname{Gal}_Q(f)$ دارای ۱۶ زیرگروه به شرح زیر است:

$$H_۰=\{\sigma_۰\},\ H_۱=\{\sigma_۰,\sigma_۱\},\ H_۲=\{\sigma_۰,\sigma_۲\},\ H_۳=\{\sigma_۰,\sigma_۳\},\ H_۴=\{\sigma_۰,\sigma_۴\}$$
$$H_۵=\{\sigma_۰,\sigma_۵\},\ H_۶=\{\sigma_۰,\sigma_۶\},\ H_۷=\{\sigma_۰,\sigma_۷\},\ H_۸=\{\sigma_۰,\sigma_۱,\sigma_۲,\sigma_۴\}$$
$$H_۹=\{\sigma_۰,\sigma_۱,\sigma_۳,\sigma_۵\},\ H_{۱۰}=\{\sigma_۰,\sigma_۱,\sigma_۶,\sigma_۷\},\ H_{۱۱}=\{\sigma_۰,\sigma_۲,\sigma_۳,\sigma_۶\},$$
$$H_{۱۲}=\{\sigma_۰,\sigma_۲,\sigma_۵,\sigma_۷\},\ H_{۱۳}=\{\sigma_۰,\sigma_۳,\sigma_۴,\sigma_۷\},\ H_{۱۴}=\{\sigma_۰,\sigma_۴,\sigma_۵,\sigma_۶\},$$
$$H_{۱۵}=\operatorname{Gal}_Q(f).$$

فرض کنید $A=\{H_i|۰\le i\le ۱۵\}$ و $B=\{K|Q\le K\le Q(\sqrt{p},\sqrt{q},\sqrt{t})$ و

$$\psi:A\longrightarrow B.$$
$$H_i\rightsquigarrow\phi(H_i)$$

$\alpha=a\sqrt{p}+b\sqrt{q}+c\sqrt{t}$ و c,b,a اعدادگویای ناصفری باشند و $Q(\sqrt{p},\sqrt{q},\sqrt{t})$ زیرمیدانی از $Q(\alpha)$ دراین صورت $\alpha\notin\phi(H_i)$، $(۱\le i\le ۱۵)$، زیرا برای هر چنین i زیرگروه H_i عضوی دارد که α را روی خودش تصویر نمی‌کند. بنابراین $Q(\alpha)\neq\phi(H_i)$، $(۱\le i\le ۱۵)$ و در نتیجه $Q(\alpha)=Q(\sqrt{p},\sqrt{q},\sqrt{t})$. لذا

$$[Q(\alpha):Q]=[Q(\sqrt{p},\sqrt{q},\sqrt{t}):Q]=۸.$$

بنابراین چندجمله‌ای مینیمال α روی Q از درجه ۸ می‌باشد، در نتیجه اگر $g(x)\in Q[x]$. یک چند جمله‌ای ناصفر باشد به قسمی که $g(\alpha)=۰$ آنگاه $\deg(g(x))\ge ۸$.

قضیه ۴: اگر p، q و t سه‌عدد اول دوبه‌دو متمایز باشند آنگاه

$$f(x)=x^۸-۴(p+q+t)x^۶+۲[(p+q+t)^۲+۲(p^۲+q^۲+t^۲)]x^۴$$
$$-۴[(p+q+t)(p^۲+q^۲+t^۲-۲pq-۲pt-۲qt)+۱۶pqt]x^۲$$
$$+(p^۲+q^۲+t^۲-۲pq-۲pt-۲qt)^۲.$$

روی Q تحویل‌ناپذیر است.

برهان: بنابر بحث‌های قبل از قضیه ۴ اگر $\gamma = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{t}$ آنگاه $Q(\gamma) = Q(\sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{t})$. بنابراین $[Q(\gamma) : Q] = ۸$ و در نتیجه چندجمله‌ای مینیمال γ روی Q از درجه ۸ می‌باشد. لذا اگر $h(x) \in Q[x]$ یک چندجمله‌ای ناصفر باشد به قسمی که $h(\gamma) = ۰$ آنگاه $\deg(h(x)) \geq ۸$.

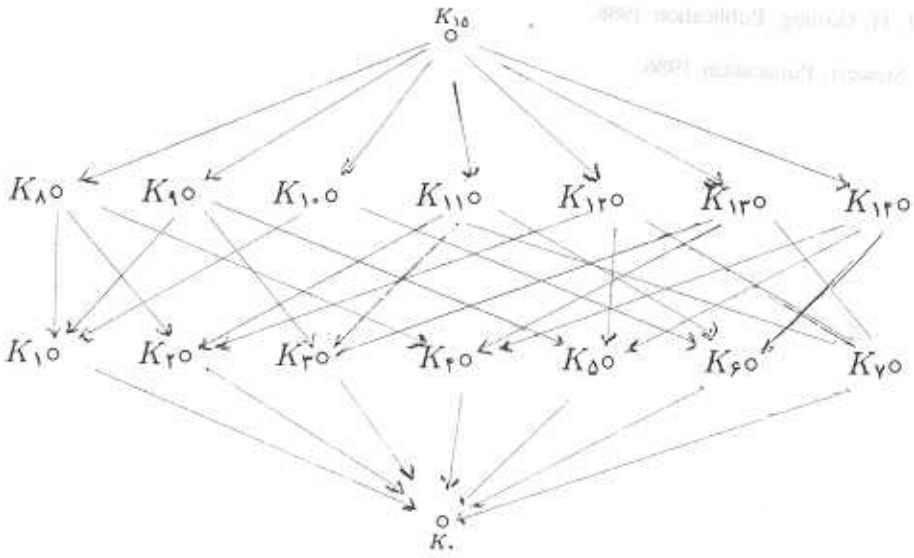
$$\gamma = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{t},$$
$$\gamma - \sqrt{p} = \sqrt{q} + \sqrt{t},$$
$$\gamma^۲ + p - ۲\gamma\sqrt{p} = q + t + ۲\sqrt{qt},$$
$$(\gamma^۲ + p - q - t)^۲ = ۴(\gamma\sqrt{p} + \sqrt{qt}),$$
$$\gamma^۴ + ۲(p - q - t)\gamma^۲ + (p - q - t)^۲ = ۴(\gamma^۲ p + qt + ۲\gamma\sqrt{pq}),$$
$$\gamma^۴ - ۲(p + q + t)\gamma^۲ + (p^۲ + q^۲ + t^۲ - ۲pt - ۲pq - ۲qt) = ۸\gamma\sqrt{pqt}.$$
$$\gamma^۸ - ۴(p + q + t)\gamma^۶ + [۲(p^۲ + q^۲ + t^۲ - ۲pq - ۲pt - ۲qt) + ۴(p + q + t)^۲]\gamma^۴$$
$$- [۴(p + q + t)(p^۲ + q^۲ + t^۲ - ۲pq - ۲pt - ۲qt) + ۶۴pqt]\gamma^۲$$
$$+ (p^۲ + q^۲ + t^۲ - ۲pq - ۲pt - ۲qt) = ۰.$$

بنابراین γ صفر $f(x)$ است. از این که چندجمله‌ای مینیمال γ روی Q از درجه ۸ می‌باشد نتیجه می‌شود که $f(x)$ روی Q تحویل‌ناپذیر است. چه در غیراین صورت γ صفر یک چندجمله‌ای از درجهٔ کوچکتر از ۸ می‌باشد که غیرممکن است.▲

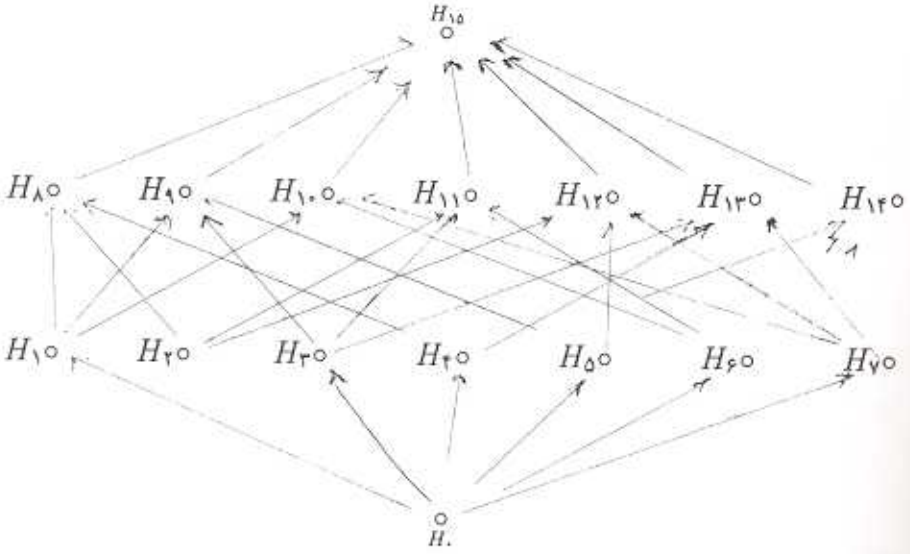
با فرض $K_i = \phi(H_i)$، $(۰ \leq i \leq ۱۵)$ خواهیم داشت

$$K_۰ = Q(\sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{t}),\ K_۱ = Q(\sqrt{q}, \sqrt{t}),\ K_۲ = Q(\sqrt{p}, \sqrt{t}),\ K_۳ = Q(\sqrt{p}, \sqrt{q})$$
$$K_۴ = Q(\sqrt{t}, \sqrt{pq}),\ K_۵ = Q(\sqrt{q}, \sqrt{pt}),\ K_۶ = Q(\sqrt{p}, \sqrt{qt}),\ K_۷ = Q(\sqrt{pq}, \sqrt{pt}, \sqrt{qt}),$$
$$K_۸ = Q(\sqrt{t}),\ K_۹ = Q(\sqrt{q}),\ K_۱۰ = Q(\sqrt{qt}),\ K_{۱۱} = Q(\sqrt{p}),\ K_{۱۲} = Q(\sqrt{pt})$$
$$K_{۱۳} = Q(\sqrt{pq}),\ K_{۱۴} = Q(\sqrt{pqt}), K_{۱۵} = Q.$$

در صفحه بعد شبکه زیرگروههای $\mathrm{Gal}_Q(f)$ و شبکه زیرمیدانهای $Q(\sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{t})$ را جهت مقایسه نشان می‌دهیم.



شبکه زیر میدانهای $Q(\sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{t})$



شبکه زیر گروههای $\mathrm{Gal}_Q(f)$

References:

[1]. Galois Theory, Joseph Rotman, Publication 1990.

[2]. Galois Theory, D. J. H. Garling, Publication 1986.

[3]. Galois Theory, Ian Stewert, Publication 1986.