

## اندازه مکان، اندازه مقیاس و مرتب سازی توزیعهای یک متغیره

عین اله پاشا: دانشگاه تربیت معلم تهران

عادل فاطمی: دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم تحقیقات

### چکیده

در این مقاله مفهوم اندازه مکان و مقیاس و تعاریف مربوط به مرتب سازی جزئی برای مقایسه توزیعها ارائه و بررسی می شود، و نیز با استفاده از تحدد مرتبه  $k$ ، روابط مرتب سازی تصادفی و پراکنندگی ارائه می شوند. و ثابت می شود که اندازه های شناخته های مانند میانگین و انحراف معیار به ترتیب اندازه های مکان و مقیاس اند. همچنین تابعی از آنتروپی توزیعها را ارائه می کنیم که اندازه مقیاس است و البته این خود ارتباطی جالب میان آنتروپی و واریانس توزیعهای یک متغیره است.

### مقدمه

در روابط مرتب سازی، عموماً مجموعه های از توابع مانند  $U$  را در نظر می گیریم به قسمی که به ازای  $u$  های متعلق به  $U$ ،  $Eu(X)$  ویژگی مورد نظر توزیع را اندازه می گیرد. مرتب سازی بر اساس  $U$  اینگونه تعریف می شود:

$$X \leq_u Y \quad \text{iff} \quad Eu(X) \leq Eu(Y) \quad \forall u \in U \quad (3-1)$$

$U$  می تواند مجموعه ای از توابع مطلوب باشد.

### تعاریف و نمادها

ما توزیع تجمعی  $F$  را اکیداً صعودی می گوئیم هرگاه روی مجموعه  $\{x : 0 < F(x) < 1\}$  اکیداً صعودی باشد. در این بررسی ما تنها متغیرهای تصادفی مطلقاً پیوسته و تابع توزیعهای اکیداً صعودی را بررسی می کنیم و منظور از یک مدل، مجموعه ای از تابع توزیعهاست.

**تعریف ۱-۲:** به ازای عدد طبیعی  $n$  و مقادیر حقیقی  $y_1, y_2, \dots, y_n$ ، (با همین ترتیب)  $S(y_1, y_2, \dots, y_n)$  را برابر تغییر علامت  $y_i$ ها تعریف می کنیم، مثلاً اگر  $n = 4$  آنگاه  $S(-2, 1, 1, -3) = 2$  اما  $S(-2, 1, 1, 3) = 1$  همچنین  $S(-2, 1, -3, 1) = 3$ .

حال فرض کنیم  $f$  تابعی حقیقی باشد که روی زیر مجموعه ای از  $R$  مانند  $I$  تعریف شده، آنگاه

$$S(f) = \sup S [f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)]$$

sup روی مجموعه  $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) | n \in \mathbb{N}, x_1 < x_2 < \dots < x_n, x_i \in I, i = 1, 2, \dots, n\}$  عمل می‌کند. در حقیقت تابع  $S(f)$  تعداد دفعاتی را می‌شمارد که  $f(x)$  محور  $x$ ها را قطع می‌کند.

مثال ۱-۲: اگر  $f(x) = x^2$ ،  $-2 \leq x \leq 2$  - آنگاه  $S(f) = 2$  و حال آنکه برای  $f(x) = \sin x$ ،  
 $-\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$  داریم  $S(f) = 3$ .

واضح است که اگر  $f \geq 0$  یا  $f \leq 0$  آنگاه  $S(f) = 0$ . گوییم که توابع  $f$  و  $g$  همدیگر را  $k$  مرتبه قطع می‌کنند، اگر  $S(f-g) = k, k = 0, 1, 2, \dots$ .

تعریف ۲-۲: تابع  $f$  را محدب مرتبه  $k$  گوییم هرگاه به ازای هر  $x \in I$  داشته باشیم:

$$f(x) \leq (\geq) 0,$$

و محدب مرتبه ۱ گوییم هرگاه به ازای هر  $x_1, x_2 \in I$  و  $x_1 < x_2$  داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} \geq (\leq) 0.$$

به عبارت دیگر تابع  $f$  محدب مرتبه ۱ است هرگاه صعودی و یا نزولی باشد. در حالت کلی تابع  $f$  محدب را

مرتبه  $k$  گوییم هرگاه به ازای هر  $x_1, x_2, \dots, x_{k+1} \in I, x_1 < x_2 < \dots < x_{k+1}$  داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \dots & x_{k+1}^{k-1} \\ f(x_1) & f(x_2) & \dots & f(x_{k+1}) \end{vmatrix} \geq (\leq) 0. \quad (1-2)$$

اگر  $k$  امین مشتق  $f$  موجود باشد آنگاه  $f$  محدب مرتبه  $k$  است اگر و فقط اگر  $f^{(k)}(x) \geq (\leq) 0$ .

نمادگذاری: فرض  $F_1$  و  $F_2$  دو تابع توزیع باشند، در این صورت:

$$R(x) = R(x; F_1, F_2) = F_2^{-1}(F_1(x)), \quad x \in S_{F_1}$$

$$\Delta(x) = R(x) - x = F_2^{-1}(F_1(x)) - x, \quad x \in S_{F_1}$$

$$\Delta^*(x) = R^{-1}(x) - x = F_1^{-1}(F_2(x)) - x, \quad x \in S_{F_2}$$

$$r(x) = r(x; F_1, F_2) = f_1(x) / f_2(F_2^{-1}(F_1(x))), \quad x \in S_{F_1}$$

که  $f_1(x) = \frac{dF_1(x)}{dx}$  و  $f_2(x) = \frac{dF_2(x)}{dx}$  به ترتیب چگالی توزیعهای  $F_1$  و  $F_2$  هستند. تابع  $R$ ، تابع جالبی است

که مطالعات زیادی بر اساس آن صورت گرفته است. اگر  $X$  دارای توزیع  $F_1$  باشد، آنگاه  $R(x)$  دارای توزیع  $F_2$

خواهد بود. اگر  $F_2$  توزیعی نمایی با  $\lambda = 1$  باشد، آنگاه  $R$  تابع خطر است،  $R_{(x)} = -\log(1 - F_1(x)) = -\log \bar{F}_1(x)$ .

و همچنین  $r$  تابع میزان از کار افتادگی  $F_1$  است، یعنی  $r(x) = R'(x) = \frac{f_1(x)}{F_1(x)}$  شیوه دیگری از نمایش  $r(x)$  به صورت زیر است:

$$r(x) = \frac{f_1(x)}{1 - F_1(x)} \times \frac{1 - F_2(R(x))}{f_2(R(x))} = \frac{\frac{f_1(x)}{F_1(x)}}{\frac{f_2(R(x))}{F_2(R(x))}}$$

این نشان می‌دهد که در حالت کلی  $r$  خارج قسمت توابع میزان از کار افتادگی  $F_1$  و  $F_2$  است. همچنین این نیز قابل توجه است که  $r(F_1^{-1}(U)) = \frac{f_1(F_1^{-1}(U))}{f_2(F_2^{-1}(U))}$  که  $U$  دارای توزیع یکنواخت پیوسته روی بازه  $[0, 1]$  است. در این حالت آنتروپی توزیع  $F_1$  را نیز می‌توان چنین نوشت:

$$H(F_1) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \log f_1(x) dF_1(x) = -\int_0^1 \log f_1(F_1^{-1}(u)) du \quad (2-2)$$

$$u = F_1(x)$$

تابع  $\Delta(x)$  تابع انتقال نیز نامیده می‌شود زیرا وقتی  $X$  به اندازه  $\Delta(x)$  انتقال داده می‌شود دارای توزیعی مشابه توزیع  $Y = \Delta(X) + X$  خواهد بود، که همان  $F_2$  است. حال تعریف زیر را که تعریف مهمی است ارائه می‌دهیم.

**تعریف ۲-۳:** فرض کنیم  $X$  متغیری تصادفی با تابع توزیع  $F_1$  و  $Y$  متغیری تصادفی با تابع توزیع  $F_2$  باشد، گوئیم  $F_2 \leq_k F_1$  یا به طور معادل  $Y \leq_k X$  اگر تابع  $\Delta$  محدب از مرتبه  $k$  باشد،  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

## اندازه مکان

**تعریف ۳-۱:** توابع توزیع  $F_1$  و  $F_2$  را از نظر مکان مقایسه پذیر گوئیم هرگاه  $\Delta$  یا  $\Delta^*$  محدب مرتبه ۰ (یعنی نامنفی) باشند و می‌نویسیم  $F_1 \circ F_2$ ، مدل  $\mathbb{F}$  را مکانی می‌نامیم هرگاه داشته باشیم:

$$\forall F_1, F_2 \in \mathbb{F} \Rightarrow F_1 \circ F_2$$

و گوئیم  $F_2$  سمت راست  $F_1$  است اگر  $\Delta$  محدب مرتبه ۰ باشد، یعنی  $F_1 \leq F_2$ .

رابطه  $\circ$  متقارن و بازگشتی است اما انتقالی نیست. واضح است که  $F_1 \circ F_2$  اگر و تنها اگر  $F_1$  و  $F_2$  هرگز همدیگر را قطع نکنند، مدل  $\mathbb{F} = \{F(\circ + a) : a \in \mathbb{R}\}$  یک مدل مکانی است، اما همه مدل‌های مکانی اینگونه نیستند. تابع انتقالی  $\Delta$  محدب مرتبه ۰،  $(\Delta(x) \geq 0)$  است اگر و تنها اگر به ازای هر  $x$ ،  $F_1(x) \geq F_2(x)$ . بنابراین مرتب‌سازی  $\leq$  همان مرتب‌سازی تصادفی است. رابطه  $\leq$  یک مرتب‌سازی جزئی در مدل  $\mathbb{F}$  است، یعنی بازگشتی، انتقالی و نامتقارن است. اگر  $\mathbb{F}$  یک مدل مکانی باشد چون که هر دو عضو  $\mathbb{F}$  در  $\leq$  مقایسه پذیرند  $(\leq, \mathbb{F})$  یک مجموعه مرتب است.

برای یافتن مرتب‌سازهای دیگری که برای بررسی مکان مناسب به نظر می‌رسند باید مرتب‌سازی‌هایی از

نوع (۱-۱) را مطالعه کنیم. برای این منظور مجموعه توابع زیر را در نظر بگیرید:

$$C_1 = \{u \text{ تابعی صعودی و پیوسته} : u\}$$

$$C_2 = \{\max(\cdot, t) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$C_3 = \{\min(\cdot, t) : t \in \mathbb{R}\}$$

قضیه ۱-۳:

$$F_1 \leq_c F_2 \Leftrightarrow F_1 \leq_{C_1} F_2 \begin{cases} \rightarrow F_1 \leq_{C_2} F_2 \\ \rightarrow F_1 \leq_{C_3} F_2 \end{cases}$$

برهان: فرض کنیم که  $F_1 \leq_c F_2$  و  $u \in C_1$  در این صورت

$$F_1 \leq_c F_2 \Rightarrow \Delta(x) = F_2^{-1}(F_1(x)) - x \geq 0 \Rightarrow F_2^{-1}(F_1(x)) \geq x$$

$$\Rightarrow F_2^{-1}(t) \geq F_1^{-1}(t),$$

$$\Rightarrow u(F_2^{-1}(t)) \geq u(F_1^{-1}(t)),$$

$$\Rightarrow \int_0^1 u(F_2^{-1}(t)) dt \geq \int_0^1 u(F_1^{-1}(t)) dt$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} u(z) dF_2(z) \geq \int_{-\infty}^{+\infty} u(z) dF_1(z)$$

$$\Rightarrow Eu(Y) \geq Eu(X) \Rightarrow F_1 \leq_{C_1} F_2$$

مرتب‌سازی‌های  $\leq_{C_2}$  و  $\leq_{C_3}$  نیز حالت‌های خاصی از مرتب‌سازی  $\leq_{C_1}$  اند. برای جهت دیگر به «ستویان

۱۹۷۲» مراجعه شود.

در بخش بعد خواهیم دید که مرتب‌سازی‌های  $\leq_{C_2}$  و  $\leq_{C_3}$  تنها مکان را اندازه نمی‌گیرد، بلکه مقیاس را نیز

می‌سنجد.

**تعریف ۲-۳:** تابع  $\psi: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$  یک اندازه مکان در  $\mathbb{F}$  است هرگاه:

(الف) برای هر  $a, b \in \mathbb{R}$  و  $F \in \mathbb{F}$  داشته باشیم:

$$\psi(a \times F + b) = a\psi(F) + b$$

(ب) اگر  $X$  دارای توزیع  $F$  باشد، آنگاه توزیع  $aX + b$  را با  $a \times F + b$  نشان می‌دهیم.

(پ) اگر  $F_1, F_2 \in \mathbb{F}$  و  $F_1 \leq F_2$  آنگاه  $\psi(F_1) \leq \psi(F_2)$ .

**مثال ۱-۳:**  $\mathbb{F}$  را یک مدل از توزیعیهای با گشتاور اول متناهی در نظر می‌گیریم. یعنی اگر  $F \in \mathbb{F}$  دارای

توزیع  $F$  باشد آنگاه  $E(X) < \infty$ . در این صورت  $\mu(F) = E(X)$  برای این خانواده یک اندازه مکان است زیرا اولاً

برای هر  $a, b$  حقیقی و هر  $F$  متعلق به  $\mathbb{F}$  داریم:

$$\mu(a \times F + b) = E(aX + b) = aE(X) + b = a\mu(F) + b$$

ثانیا اگر  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$  و  $F_1 \leq F_2$  آنگاه به ازای هر  $x$  متعلق به  $S_{F_1}$  داریم:

$$\begin{aligned} F_1 \leq F_2 &\Rightarrow \Delta(x) = F_2^{-1}(F_1(x)) - x \geq 0 \Rightarrow F_2^{-1}(F_1(x)) \geq x \\ &\Rightarrow F_2^{-1}(t) \geq F_1^{-1}(t), \\ &\Rightarrow \int_0^1 F_2^{-1}(t) dt \geq \int_0^1 F_1^{-1}(t) dt \\ &\Rightarrow E(Y) \geq E(X) \Rightarrow \mu(F_2) \geq \mu(F_1) \end{aligned}$$

### اندازه مقیاس

هدف از این بخش پاسخ به این سوال است که کی و چگونه می‌توان دو توزیع را از نظر مقیاس مقایسه کرد. این سوال می‌تواند جوابهای بیشماری داشته باشد که یکی از این جوابها را در اینجا شرح می‌دهیم.

تعریف ۱-۴: تابع توزیعهای  $F_1$  و  $F_2$  را در مقیاس مقایسه پذیر گوییم هرگاه  $\Delta$  یا  $\Delta^*$  محدب از مرتبه ۱ باشند و می‌نویسیم  $F_1 \leq_1 F_2$ . مدل  $F$  یک مدل مکانی-مقیاسی است هرگاه به ازای  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$  بتوان نتیجه گرفت که  $F_1 \leq_1 F_2$ . گوییم مقیاس  $F_1$  از مقیاس  $F_2$  بزرگتر نیست (یا  $F_1$  از  $F_2$  گسترده‌تر نیست). هرگاه  $\Delta$  محدب مرتبه ۱ (صعودی) باشد، در این صورت می‌نویسیم:  $F_1 \leq_1 F_2$ .

به وضوح رابطه  $\leq_1$  یک رابطه بازگشتی و متقارن است اما انتقالی نیست. مدل  $F = \{F(a \circ + b) : a, b \in \mathcal{R}\}$  یک مدل مکانی مقیاسی است، اما همه خانواده‌های مکانی مقیاسی لزوماً از این نوع نیستند. مرتب‌سازی  $\leq_1$  همان مرتب‌سازی پراکندگی ( $\leq_{disp}$ ) معرفی شده توسط «بیکل و لهن (۱۹۷۶)» می‌باشد. آنها چنین بیان کردند که در توزیعهای  $F_1$  و  $F_2$  که  $F_1$  بیش از  $F_2$  گسترده شده است، برای هر  $u, v$  که  $0 < u < v < 1$  داریم:

$$F_2^{-1}(v) - F_2^{-1}(u) \geq F_1^{-1}(v) - F_1^{-1}(u) \quad (1-4)$$

این رابطه به راحتی از محدب مرتبه ۱ بودن  $\Delta(x)$  نتیجه می‌شود یعنی فاصله بین هر دو چندک از توزیع  $F_2$  از فاصله بین چندک‌های متناظر آنها از توزیع  $F_1$  بیشتر باشد. همانطور که گفتیم نامساوی (۱-۴) صادق است اگر و تنها اگر  $\Delta(x)$  صعودی باشد. بنابراین مرتب‌سازی  $\leq_1$  و  $\leq_{disp}$  یکی هستند.

حال بعضی از خواص  $\leq_1$  را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۲-۴: گوییم  $F_1 \approx F_2$  هرگاه  $F_1 \leq_1 F_2$  و  $F_2 \leq_1 F_1$ .

قضیه ۱-۴: رابطه  $\leq_1$  انتقالی است و داریم:

$$F_1 \approx_1 F_2 \Rightarrow \exists a : F_1(\circ) = F_2(\circ + a)$$

برهان: تابع توزیعهای  $F_1, F_2, F_3$  را در نظر بگیرید به طوری که  $F_1 \leq_1 F_2$  و  $F_2 \leq_1 F_3$ . در این

صورت توابع

$$\Delta_2(x) = R_2(x) - x = F_2^{-1}(F_2(x)) - x, \quad \Delta_1(x) = R_1(x) - x = F_2^{-1}(F_1(x)) - x$$

توابعی صعودی هستند. یعنی به ازای هر  $x_1, x_2 \in S_{F_1}$  و  $y_1, y_2 \in S_{F_2}$  به طوری که  $x_1 < x_2$  و  $y_1 < y_2$  داریم:

$$\Delta_1(x_1) \leq \Delta_1(x_2) \Rightarrow R_1(x_1) - x_1 \leq R_1(x_2) - x_2 \Rightarrow R_1(x_2) - R_1(x_1) \geq x_2 - x_1$$

$$\Delta_2(y_1) \leq \Delta_2(y_2) \Rightarrow R_2(y_1) - y_1 \leq R_2(y_2) - y_2 \Rightarrow R_2(y_2) - R_2(y_1) \geq y_2 - y_1$$

حال  $R_3(x)$  را چنین تشکیل می‌دهیم:

$$R_3(x) = R_2(R_1(x)) = F_2^{-1}(F_2(F_2^{-1}(F_1(x)))) = F_2^{-1}(F_1(x))$$

در این صورت به ازای هر  $x_1, x_2 \in S_{F_1}$  که  $x_1 < x_2$ ، با توجه به دو نامساوی قبلی که به دست آمد داریم:

$$R_3(x_2) - R_3(x_1) = R_2(R_1(x_2)) - R_2(R_1(x_1)) \geq R_1(x_2) - R_1(x_1) \geq x_2 - x_1$$

بنابراین  $\Delta_3(x) = R_3(x) - x$  تابعی صعودی است یعنی  $F_1 \leq F_3$ . بعلاوه  $\Delta(x) = (F_2^{-1}(F_1(x)) - x)$

صعودی است اگر و تنها اگر

$$\Delta^*(x) = F_1^{-1}(F_2(x)) - x = -\Delta(F_1^{-1}(F_2(x)))$$

نزولی باشد. بنابراین:

$$F_1 \approx_1 F_2 \Leftrightarrow F_1 \leq_1 F_2 \ \& \ F_2 \leq_1 F_1$$

$$\Leftrightarrow \Delta(x) \text{ نزولی} \ \& \ \Delta(x) \text{ صعودی} \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} : \Delta(x) \equiv a$$

$$\Leftrightarrow F_2^{-1}(F_1(x)) - x = a \Leftrightarrow F_2^{-1}(F_1(x)) = a + x$$

$$\Leftrightarrow F_1(x) = F_2(a + x).$$

به آسانی می‌توان دید که  $F_1 \leq_1 F_2$  اگر و تنها اگر به ازای هر  $a \in \mathbb{R}$ ،  $a \leq S(\Delta(\cdot) - a)$  یعنی تابع  $\Delta$  هیچ

خطی موازی محور  $x$ ها را در بیش از یک نقطه قطع نمی‌کند. و این برقرار است از و تنها اگر  $F_1(\cdot)$  و

$F_2(\cdot + a)$  همدیگر را حداکثر در یک نقطه قطع کنند.

حال ما دو نوع دیگر از مرتب‌سازی مقیاس  $\leq_1^*$ ،  $\leq_2^*$  را تعریف می‌کنیم که از  $\leq_1$  ضعیف‌تر بوده و برای

استفاده ساده ترند.

زمانی که  $F_1 \leq_1^* F_2$  هر سه نوع مرتب‌سازی  $\leq_1$ ،  $\leq_2^*$ ،  $\leq_1^*$  منطبق هستند، یعنی هم زمان رخ می‌دهند

همچنین مرتب‌سازی  $\leq_2^*$  نسبت به مرتب‌سازی واریانس توزیعیها قوی‌تر است، یعنی:

$$X \leq_1^* Y \Rightarrow \sigma_x^2 \leq \sigma_y^2$$

تعریف ۳-۴: برای توزیعیهای  $F_1$  و  $F_2$  می‌گوییم که  $F_1 \leq_1^* F_2$  هرگاه اعدادی حقیقی مانند  $a, b$  باشند که

$$\Delta(x) \geq b; \quad x > a,$$

$$\Delta(x) \leq b; \quad x < a,$$

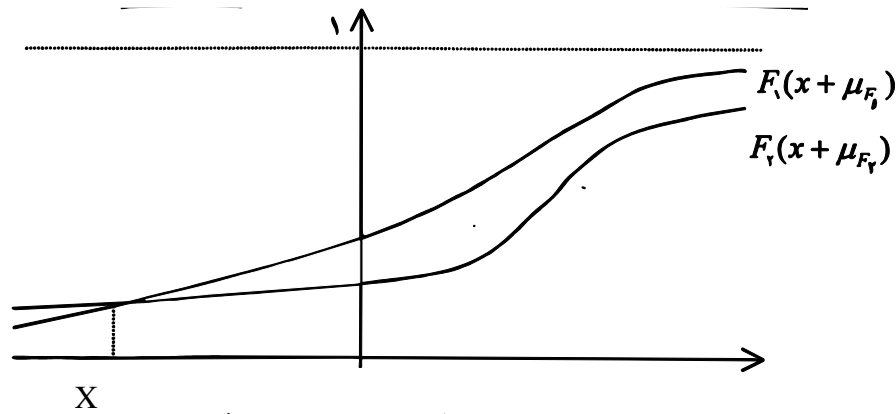
اگر  $F_1$  و  $F_2$  دارای گشتاورهای اول متنهایی  $\mu_{F_1}$  و  $\mu_{F_2}$  باشند. خواهیم گفت  $F_1 \leq^* F_2$  هرگاه عددی حقیقی مانند  $a$  باشد که

$$\Delta(x) \geq \mu_{F_1} - \mu_{F_2}; \quad x > a,$$

$$\Delta(x) \leq \mu_{F_1} - \mu_{F_2}; \quad x < a$$

(حالت  $\leq^*$  حالتی است از  $\leq^{**}$  که  $a$  با  $\mu_{F_1} - \mu_{F_2}$  جایگزین شده است.) مرتب‌سازی  $\leq^{**}$  می‌تواند اینگونه نیز به کار رود:

$F_1 \leq^{**} F_2$  یا  $F_2 \leq^* F_1$  هرگاه  $b \in \mathbb{R}$  وجود داشته باشد، به طوری که  $S(F_1(\circ) - F_2(\circ + b)) = 1$ . یعنی برای بعضی از  $b$ ها تابع توزیعهای  $F_1(\circ)$  و  $F_2(\circ + b)$  همدیگر را دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کنند. به علاوه  $F_1 \leq^* F_2$ ،  $F_1 \leq^* F_2$  هرگاه  $F_1(\circ + \mu_{F_1})$  و  $F_2(\circ + \mu_{F_2})$  همدیگر را دقیقاً در یک نقطه قطع کنند. به وضوح در شکل (۱-۴) می‌توان دید که  $F_1 \leq^* F_2$  برقرار است، اما  $F_1 \leq F_2$  برقرار نیست، زیرا اگر  $F_2(\circ + \mu_{F_2})$  را اندکی رو به چپ انتقال دهیم  $F_1(\circ + \mu_{F_1})$  را در دو نقطه قطع خواهد کرد و حال آنکه در مرتب‌سازی  $\leq^*$  گفتیم که  $F_1$  و  $F_2$  را اگر به هر اندازه انتقال دهیم همدیگر را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کنند.



شکل ۱-۴: حالتی که  $F_1 \leq^* F_2$  اما  $F_1 \leq F_2$  برقرار نیست

قضیه ۲-۴: روابط زیر برقرارند:

$$F_1 \leq F_2 \quad (\Leftrightarrow F_1 \leq \text{disp } F_2) \Rightarrow F_1 \leq^* F_2 \Rightarrow F_1 \leq^{**} F_2 \quad (\text{الف})$$

ب) اگر  $F_1$  و  $F_2$  از نظر مقیاس قویاً مقایسه پذیر باشند، آنگاه

$$F_1 \leq F_2 \quad (\Leftrightarrow F_1 \leq \text{disp } F_2) \Leftrightarrow F_1 \leq^* F_2 \Leftrightarrow F_1 \leq^{**} F_2$$

برهان: (الف) چون  $F_1 \leq F_2$  بنابراین  $\Delta(x)$  تابعی صعودی است، پس به ازای هر  $x_0$  دلخواه داریم:

$$X > (<) x_0 \Rightarrow \Delta(x) \geq (\leq) \Delta(x_0)$$

بالاخص برای  $x_0 = \Delta^* \mu_{F_1} - \mu_{F_2}$  و

$x > (<) \Delta^* (\mu_{F_1} - \mu_{F_2}) \Rightarrow \Delta(x) \geq (\leq) \Delta (\Delta^* (\mu_{F_1} - \mu_{F_2})) = \mu_{F_1} - \mu_{F_2}$   
 پس کافی است  $a$  را برابر  $\Delta^* (\mu_{F_1} - \mu_{F_2})$  بگیریم تا داشته باشیم  $F_1 \leq^* F_2$ . در رابطه بالا در مورد  $\leq^*$   
 اگر  $a = \Delta^* (\mu_{F_1} - \mu_{F_2})$  و  $b = \mu_{F_1} - \mu_{F_2}$  ثابت می‌شود که  $F_1 \leq^{**} F_2$   
 (ب) یک طرف این رابطه در قسمت قبل ثابت شد حال برای اثبات طرف دیگر فرض می‌کنیم  $F_1 <^{**} F_2$  و  
 فرض کنیم که  $F_1$  و  $F_2$  از نظر مقیاس قویاً مقایسه پذیرند. یعنی  $F_1 \leq_{c_1} F_2$  از اینجا نتیجه می‌شود که  $\Delta$  تابعی  
 یکنواست و از تعریف  $F_1 \leq^{**} F_2$  واضح است که  $\Delta$  نمی‌تواند نزولی باشد بنابراین صعودی است، پس این  
 رابطه درست است.

**نتیجه ۱-۴:** اگر  $F$  یک مدل از توزیعیهای مکانی-مقیاس باشد، آنگاه  $\leq^*$  رابطه‌ای انتقالی است و هر دو  
 توزیع از  $F$  نسبت به رابطه  $\leq^{**}$  مقایسه پذیرند.  
 حال دو نوع مرتب‌سازی دیگر از نوع (۱-۱) را که اهمیت زیادی دارند، معرفی می‌کنیم. مجموعه توابع  
 زیر را در نظر بگیرید:

$$S_1 = \{ u : \text{u صعودی و محدب} \},$$

$$S_2 = \{ u : \text{u محدب} \}$$

به کمک قضیه ۱-۳ و به طور مشابه می‌توان نشان داد که

$$F_1 \leq_{c_1} F_2 \Leftrightarrow F_1 \leq_o F_2 \Rightarrow F_1 \leq_s F_2 \quad (۳-۴)$$

حال فرض کنیم  $F$  مجموعه انتخاب شده و  $\leq$  رابطه مرتب‌سازی مقیاس برای  $F$  باشد، اندازه مقیاس را چنین  
 تعریف می‌کنیم.

**تعریف ۴-۴:** تابع  $\psi : F \rightarrow R$  یک اندازه مقیاس است هرگاه

الف) برای هر  $F \in F$  و  $a, b \in R$  داشته باشیم:

$$\psi(a \times F + b) = |a| \psi(F)$$

ب) اگر  $F_1 \leq F_2$  و  $F_1, F_2 \in F$  آنگاه:

$$\psi(F_1) \leq \psi(F_2)$$

قضیه زیر به این سوال پاسخ می‌دهد که چگونه می‌توان یک اندازه مقیاس برای زمانی که از  $\leq^*$  استفاده  
 می‌کنیم یافت.

**قضیه ۳-۴:** فرض کنیم  $F_1$  و  $F_2$  توزیعیهای  $X$  و  $Y$  با امید متناهی  $\mu_{F_1}$  و  $\mu_{F_2}$  باشد آنگاه

$$F_1 \leq^* F_2 \Rightarrow F_1(+\mu_{F_1}) \leq_s F_2(+\mu_{F_2})$$

$$\Rightarrow F_1(+\mu_{F_1}) \leq_{s_2} F_2(+\mu_{F_2})$$

برهان: فرض کنیم  $X$  دارای توزیع  $F_1$  و  $Y$  دارای توزیع  $F_2$  باشد به طوری که  $F_1 \leq^* F_2$ . پس  $X_0$  هست که برای  $x > (<) x_0$  داریم:

$$F_1(x + \mu_{F_1}) \leq (\geq) F_2(x + \mu_{F_2})$$

با توجه به شکل ۱-۳ اگر  $t \geq x_0$  آنگاه

$$E_{\max}(X - \mu_{F_1}, t) \leq E_{\max}(Y - \mu_{F_1}, t)$$

و وقتی  $t < x_0$  داریم:

$$E_{\max}(X - \mu_{F_1}, t) = t - E_{\max}(X - \mu_{F_1}, t) \leq t - E_{\max}(Y - \mu_{F_1}, t) = E_{\max}(Y - \mu_{F_1}, t)$$

$$\Rightarrow F_1(\circ + \mu_{F_1}) \leq_{c_1} F_2(\circ + \mu_{F_2})$$

حال از رابطه (۳-۴) نتیجه می‌شود  $F_1(\circ + \mu_{F_1}) \leq_{s_1} F_2(\circ + \mu_{F_2})$  نهایتاً رابطه  $F_1(\circ + \mu_{F_1}) \leq_{s_1} F_2(\circ + \mu_{F_2})$

از «استویان» (۱۹۷۲) نتیجه می‌شود.

نتیجه ۲-۴: انحراف معیار  $\sigma_F = [ \int (x - \mu_F)^2 dF(x) ]^{1/2}$  اندازه مقیاس برای  $\leq^*$  می‌باشد. به راحتی می‌توان دید که شرط اول صادق است. شرط دوم نیز از قضیه قبل نتیجه می‌شود. اگر  $F$  را مدل مورد نظر با رابطه  $\leq^*$  در نظر بگیریم آنگاه به ازای هر  $F_1, F_2 \in \mathbb{F}$  داریم  $F_1 \leq^* F_2$  یا  $F_1 \leq^* F_2$ . فرض کنیم  $F_1 \leq^* F_2$  آنگاه:

$$F_1 \leq^* F_2 \Rightarrow F_1(\circ + \mu_{F_1}) \leq_{s_1} F_2(\circ + \mu_{F_2})$$

$$\Rightarrow \sigma_{F_1}^2 = E(X - \mu_{F_1})^2 \leq E(Y - \mu_{F_2})^2 = \sigma_{F_2}^2 \quad (۴-۴)$$

$$\Rightarrow \sigma_{F_1} \leq \sigma_{F_2}$$

از رابطه (۴-۴) و قضیه ۲-۴ نتیجه می‌شود که انحراف معیار یک اندازه مقیاس برای مرتب‌سازی پراکندگی (یعنی  $\leq$ ) نیز می‌باشد.

بالاخره مطلب قابل اشاره دیگر این است که تابع  $\sigma_1(F) = e^{H(F)}$  نیز یک اندازه مقیاس برای مدل  $\mathcal{F}$  با مرتب‌سازی پراکندگی  $\leq$  می‌باشد. زیرا:

اولاً، اگر  $X$  دارای توزیع  $F$  باشد، آنگاه

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, F \in \mathbb{F} \quad \sigma_1(a \times F + b) = e^{H(aX + b)} = e^{[\log |a| + H(X)]} = e^{\log |a|} e^{H(X)} = |a| \sigma_1(F)$$

و ثانیاً با فرض  $F_1, F_2 \in \mathbb{F}$  و  $F_1 \leq F_2$  داریم:

$$F_1 \leq F_2 \Leftrightarrow \Delta(x) \text{ صعودی} \Leftrightarrow r(x) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{f_1(F_1^{-1}(u))}{f_2(F_1^{-1}(u))} \geq 1$$

$$f_1(F_1^{-1}(u)) \geq f_2(F_1^{-1}(u)) \Leftrightarrow \log f_1(F_1^{-1}(u)) \geq \log f_2(F_1^{-1}(u))$$

$$\Leftrightarrow - \int_0^1 \log f_1(F_1^{-1}(u)) du \leq - \int_0^1 \log f_2(F_1^{-1}(u)) du$$

$$\Leftrightarrow - \int_{-\infty}^{+\infty} \log f_1(x) dF_1(x) \leq - \int_{-\infty}^{+\infty} \log f_2(x) dF_2(x)$$

$$\Leftrightarrow H(F_1) \leq H(F_2) \Leftrightarrow \sigma_1(F_1) \leq \sigma_1(F_2)$$

### تشکر و قدردانی

در پایان به جاست از آقای دکتر احسان‌اله صوفی استاد دانشگاه ویسکانسین میلواکی آمریکا به خاطر ارسال تعدادی از مقالات که بسیار مفید و با ارزش بودند سپاسگزاریم.

### مراجع

1. P.j. Bickel and E.L. Lehmann, Descriptive Statistics for Nonparametric Models. III. Dispersion, Ann. Statist, Spread, Manuscript, 4 (1976) 1139-1159; IV.
2. E. Ebrahimi, E. Maasoumi, E.S. Soofi, Ordering univariate distributions by entropy and variance. Journal of Econometrics 90 (1999) 317-336.
3. H.on Oja, Location, Scale, Skewness and Kurtosis of Univariate Distributions, Scand. J. Sataist, 8 (1981)154-168.
4. M. Shaked, J.G. Shantikumar, Stochastic Orders and Their Applications, Academic Press, New York(1994).
5. D. Stoyan, Uber Einige Eigenschafton Monoton Stochastischer Prozesse Math, Nachr, 52 (1972) 21-034.