ساخت موجک‌های چندجمله‌ای با استفاده از حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته

زهرا بهرامی*، علی مهدی‌فر؛
دانشگاه شهرکرد، دانشکدهٔ علوم، گروه فیزیک

چکیده

در این مقاله به معرفی ارتباط بین حالت‌های همدوس و موجک‌ها می‌پردازیم. بدین منظور ابتدا حالت‌های همدوس استاندارد، حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته و حالت‌های همدوس غیرخطی را معرفی کرده و ویژگی هر یک را بیان می‌کنیم. سپس حالت‌های همدوس غیرخطی نوسان‌گر هماهنگ دوبعدی روی سطح تخت را بررسی کرده و رابطهٔ تفکیک واحد مربوط به آن را بیان می‌کنیم. در مرحلهٔ بعد با استفاده از نمادگذاری دیراک به بررسی شرط پذیرفتنی موجک مادر می‌پردازیم. سپس با استفاده از رابطهٔ تفکیک واحد حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته، حالت‌های همدوس غیرخطی و شرط پذیرفتنی، رابطه‌ای کلی برای به‌دست آوردن موجک‌های چندجمله‌ای ارائه خواهیم کرد. در نهایت، به‌عنوان نمونه موجک‌های چندجمله‌ای مرتبط با حالت‌های همدوس غیرخطی روی سطح تخت را نیز به‌دست می‌آوریم.

مقدمه

تبدیل فوریه به‌عنوان قدیمی‌ترین ابزار تبدیل سیگنال، قادر به انتقال سیگنال دریافتی از حوزهٔ زمان به حوزهٔ بسامد است. این تبدیل فاقد هرگونه اطلاعاتی در مورد زمان وقوع هر بسامد است. به‌عبارت‌دیگر، در این تبدیل اطلاعات وابسته به زمان، به‌طور کامل حذف می‌شود [۱]. برای تصحیح این اِشکال، گابور با ابداع روشی جدید، تبدیل فوریه را فقط برای محدودهٔ زمانی کوچکی از سیگنال دریافتی به‌کار برد و این محدوده را پنجرهٔ زمانی نامید. گابور با حرکت پنجره مزبور در طول زمانِ سیگنال دریافتی، تبدیل فوریهٔ هر قسمت را محاسبه و آن‌را تبدیل فوریهٔ پنجره‌ای نامید. درعین‌حال، این تبدیل دارای محدودیتِ ثابت بودن عرض پنجره است، که منجر به عدم طبقه‌بندی بسامدهایی با طول زمانی متفاوت می‌شود [۲].

تبدیل موجک، روشی مشابه با تبدیل فوریهٔ پنجره‌ای است، با این تفاوت که پنجرهٔ استفاده شده ابعاد و زمان‌های قرارگیری متفاوت دارد. در حقیقت، در تبدیل موجک بین ابعاد پنجره و بسامد تشخیص داده شده به‌نوعی ارتباط منطقی وجود دارد، به‌طوری‌که هر چه ابعاد پنجره کوچک‌تر باشد، موجک به شکل فشرده‌تری ظاهر شده و منجر به آشکارسازی جزئیات بیش‌تری از سیگنال می‌شود. از سوی دیگر مشابه روش تبدیل فوریهٔ پنجره‌ای، جابه‌جایی پنجره باعث تشخیص نواحی مختلف بسامد می‌شود. در مجموع این روش منجر به معرفی یک دیدگاه زمان-بسامد از سیگنال می‌شود [۳].

واژه‌های کلیدی: تبدیل موجک، حالت‌های همدوس غیرخطی، رابطهٔ تفکیک واحد، شرط پذیرفتنی.
دریافت ۹۱/۹/۱۸ پذیرش ۹۲/۱۱/۱
نویسندهٔ مسئول zz.bahramii@yahoo.com

[Downloaded from jsci.khu.ac.ir on 2024-04-28]

موجک‌ها دسته‌ای از توابع ریاضی هستند که حدود سی سال است بررسی و تحقیق در زمینهٔ آن به‌طور جدی شروع شده است. موجک‌ها نمونه‌های انتقال یافته و مقیاس شده یک تابع به نام موجک مادر هستند که از نظر ریاضی باید شرط پذیرفتنی را ارضا کنند. از نمونه‌های موجک می‌توان به موجک هار، موجک مِیر، موجک مورله و موجک کلاه مکزیکی اشاره کرد. یکی از مهم‌ترین مشکلات اولیه در کاربرد عملی از تبدیلات موجک، انتخاب مناسب موجک مادر است که در مواردی با سعی و خطا و توسط شبیه‌سازی‌های گوناگون، بهترین و کارآمدترین موجک مادر انتخاب می‌گردد [٤]، [٥]، [٦].

از طرف دیگر، حالت‌های همدوس نوسان‌گر هماهنگ نقش بسیار مهمی در بسیاری از شاخه‌های فیزیک نوین به‌ویژه مکانیک کوانتومی دارند. به‌طورکلی هامیلتونی این سامانه بر حسب عمل‌گرهای آفرینش و نابودی بیان می‌شود، که این عمل‌گرها از جبر ویل هایزنبرگ تبعیت می‌کنند. در سال‌های اخیر تلاش‌های زیادی برای تعمیم حالت‌های همدوس از جنبه‌های مختلف صورت گرفته است. حالت‌های همدوسی که در این مقاله بدان می‌پردازیم، حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته، دارای رابطهٔ تفکیک واحد و حالت‌های همدوس غیرخطی به‌عنوان یک حالت خاص حالت‌های همدوس غیرخطی روی سطح تخت هستند.

در این مقاله، ابتدا حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته و غیرخطی را تعریف کرده و سپس حالت‌های همدوس روی سطح تخت را به تفصیل بیان می‌کنیم. در بخش بعد شرط پذیرفتنی موجک مادر را در نمادگذاری دیراک توضیح می‌دهیم. در ادامه با استفاده از حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته و حالت‌های همدوس غیرخطی به ساخت موجک‌های چندجمله‌ای می‌پردازیم. سپس به‌عنوان نمونه، موجک‌های چندجمله‌ای را با استفاده از حالت‌های همدوس روی سطح تخت به‌دست می‌آوریم.

۱. حالت‌های همدوس استاندارد، حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته و حالت‌های همدوس غیرخطی

۱-۱. حالت‌های همدوس استاندارد

حالت‌های همدوس در ضمن بررسی نوسان‌گر هماهنگ و هم‌زمان با تولد مکانیک کوانتومی به‌وسیلهٔ شرودینگر معرفی شد [۷]، [۸]. ساختار نوسان‌گر هماهنگ از جمله مباحث عمده در بسیاری از حوزه‌های فیزیک مدرن به‌ویژه مکانیک کوانتومی به‌شمار می‌آید. یک نوسان‌گر هماهنگ کوانتومی با عمل‌گرهای آفرینش و نابودی $\hat{a}^{\dagger}$ و $\hat{a}$ توصیف شده که کنش این عمل‌گرها روی فضای فوک،

$$\left\{ |n\rangle, \langle m|n\rangle = \delta_{m,n} \; ; m,n \in N \right\}_{n=۰}^{\infty} \qquad (۱)$$

بدین‌صورت است:

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-۱\rangle, \qquad \hat{a}^{\dagger}|n\rangle = \sqrt{n+۱}|n+۱\rangle, \qquad (۲)$$

که در آن $\hat{n} = \hat{a}^{\dagger}\hat{a}$ عمل‌گر عددی است. این عمل‌گرها از جبر ویل-هایزنبرگ پیروی می‌کنند،

$$\left[\hat{a},\hat{a}^{\dagger}\right] = \hat{I}, \qquad \left[\hat{a},\hat{n}\right] = \hat{a}, \qquad \left[\hat{a}^{\dagger},\hat{n}\right] = -\hat{a}^{\dagger}. \qquad (۳)$$

[Downloaded from jsci.khu.ac.ir on 2024-04-28]

حالت‌های همدوس استاندارد به‌صورت ویژه حالت‌های عمل‌گر نابودی $\hat{a}$ تعریف می‌شوند که با استفاده از نحوهٔ کنش این عمل‌گر [رابطهٔ (۲)]، حالت‌های مزبور بدین صورت به‌دست می‌آیند:

$$\hat{a}|z\rangle = z|z\rangle,$$
$$|z\rangle = \exp\left(-\frac{|z|^{۲}}{۲}\right)\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle, \qquad (٤)$$
$$\langle z|z\rangle = ۱$$

۱-۲. ویژگی‌های حالت‌های همدوس استاندارد

از جمله ویژگی‌های حالت‌های همدوس استاندارد می‌توان به این موارد اشاره کرد:

۱. خانوادهٔ حالت‌های همدوس استاندارد، رابطهٔ تفکیک واحد[۱] را بدین‌صورت ارضا می‌کنند:

$$\frac{۱}{\pi}\int_C d^{۲}z\,|z\rangle\langle z| = \hat{I}, \qquad d^{۲}z = |z|\;d|z|\;d\theta, \qquad (٥)$$

که در آن انتگرال‌گیری روی تمام صفحهٔ اعداد مختلط صورت می‌گیرد

۲. حالت‌های همدوس نامتعامدند،

$$\left\|\langle z|z'\rangle\right\|^{۲} = \exp|z-z'|^{۲}. \qquad (٦)$$

اغلب ترکیب دو ویژگی بالا، با عنوان «اَبَرکامل بودن» مطرح می‌شود.

۳. برای حالت همدوس استاندارد، حاصل‌ضرب نامعینی‌های (Δx) و (Δp) کران پایین اصل عدم قطعیت را برآورده می‌کند،

$$(\Delta x)(\Delta p) = \frac{۱}{٤}. \qquad (۷)$$

۱-۳. تعمیم حالت‌های همدوس

حالت‌های همدوس نوسان‌گر هماهنگ به‌روش‌های گوناگونی تعمیم یافته‌اند، که گام‌های مهمی در جهت گسترش این نظریه هستند. از جملهٔ این تعمیم‌ها می‌توان به این موارد اشاره کرد [۹]:

۱. تعمیم‌های دینامیکی: مبتنی بر پتانسیل‌های متفاوت با پتانسیل نوسان‌گر هماهنگ.

۲. تعمیم‌های تقارنی: بر اساس نظریهٔ گروه‌ها.

۳. تعمیم‌های جبری: متناظر با تغییر شکل جبر نوسان‌گر هماهنگ.

مهم‌ترین ویژگی حالت‌های همدوس تعمیم‌یافتهٔ $|z\rangle_g$، دارا بودن رابطهٔ تفکیک واحد بدین‌صورت است:

$$\int d\mu_z\,|z\rangle_g\,{}_g\langle z| = \hat{I}, \qquad (۸)$$

که در آن $d\mu_z$ یک سنجهٔ مناسب است [۱۰]، [۱۱].

از جمله تعمیم‌های جبری حالت‌های همدوس، حالت‌های همدوس غیرخطی هستند. برای رسیدن به این حالت‌ها عمل‌گرهای جبر نوسان‌گرتغییر شکل‌یافته را بدین‌صورت در نظر می‌گیریم [۱۲]:

۱. Resolution of the identity

[Downloaded from jsci.khu.ac.ir on 2024-04-28]

$$\hat{A} = \hat{a}\ f(\hat{n}) = f(\hat{n}+1)\,\hat{a},$$
$$\hat{A}^{\dagger} = f^{\dagger}(\hat{n})\,\hat{a}^{\dagger} = \hat{a}^{\dagger}\ f^{\dagger}(\hat{n}+1), \tag{۹}$$

که برای آن‌ها داریم،

$$\left[\hat{A}, \hat{A}^{\dagger}\right] = (\hat{n}+1)\ f(\hat{n}+1)\ f^{\dagger}(\hat{n}+1) - \hat{n}\ f(\hat{n})\ f^{\dagger}(\hat{n}),$$
$$\left[\hat{A}, \hat{n}\right] = \hat{A}, \qquad \left[\hat{A}^{\dagger}, \hat{n}\right] = -\hat{A}^{\dagger}. \tag{۱۰}$$

دراین‌صورت نمایش حالت‌های همدوس غیرخطی در پایهٔ حالت‌های عددی بدین‌صورت به‌دست می‌آید:

$$|z,\ f\rangle = N_f \left(|z|^{۲}\right)^{-\frac{۱}{۲}} \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}\,[\ f(n)]!} |n\rangle, \qquad z \in C, \tag{۱۱}$$

که در آن ضریب به‌هنجارش N_f با این معادله بیان می‌شود:

$$N_f = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{|z|^{۲n}}{n!\left([\ f(n)]!\right)^{۲}}. \tag{۱۲}$$

و $[f\ (n)]!$ بنا به تعریف برابر است با:

$$[\ f(n')]! = f(۰)\ f(۱) \ldots f(n), \qquad [\ f(0)]! = ۱. \tag{۱۳}$$

حالت‌های همدوس غیرخطی نوسان‌گر هماهنگ روی سطح تخت

به‌منظور بررسی ارتباط میان تابع تغییر شکل در نظریهٔ حالت‌های همدوس غیرخطی و ساختار هندسی فضای فیزیکی، یک نوسان‌گر دوبعدی روی سطح تخت در نظر می‌گیریم. با مقایسهٔ جبر این نوسان‌گر با جبر نوسان‌گر تغییر شکل یافتهٔ (۱۰) معلوم می‌شود که نوسان‌گر دوبعدی مزبور را می‌توان به‌عنوان نوسان‌گر هماهنگ یک بعدی تغییر شکل یافته‌ای با تابع تغییر شکل

$$f(\hat{n}) = \sqrt{(N+۱-\hat{n})}, \tag{۱٤}$$

در نظر گرفت که در اینجا N بعد فضای فوک متناهی مربوط به جبر نوسان‌گر هماهنگ روی سطح تخت است [۱۲]. با توجه به محدود بودن حالت‌های عددی در فضای هیلبرت با بعد متناهی، حالت‌های همدوس با بعد متناهی را می‌توانیم از قطع کردن حالت‌های همدوس استاندارد در فضای هیلبرت با بعد نامتناهی به‌دست آوریم [۱۳]، [۱٤]. بر این اساس با استفاده از رابطهٔ (۹) حالت‌های همدوس متناهی متناظر با نوسان‌گر هماهنگ دوبعدی روی سطح تخت به‌دست می‌آید،

$$|z\rangle_f = (۱+|z|^{۲})^{-\frac{N}{۲}} \exp(z\,\hat{A}^{\dagger})|۰\rangle$$
$$= (۱+|z|^{۲})^{-\frac{N}{۲}} \sum_{n=۰}^{N} \sqrt{\binom{N}{n}}\, z^n |n\rangle, \tag{۱۵}$$

که در آن z نشان‌دهندهٔ دامنهٔ حالت همدوس است و عددی مختلط است. نشان داده شده است که رابطهٔ تفکیک واحد برای حالت‌های همدوس غیرخطی روی فضای تخت نیز بدین‌صورت به‌دست می‌آید [۱۲]:

[Downloaded from jsci.khu.ac.ir on 2024-04-28]

$$\frac{N+1}{\pi}\int \frac{d^2 z}{(1+|z|^2)^2}|z\rangle_{f\ f}\langle z| = \hat{\mathrm{I}}. \qquad (16)$$

بدین‌ترتیب، حالت‌های همدوس روی سطح تخت به‌دست آمده یک مجموعهٔ اَبَر کامل است و رابطهٔ تفکیک واحد مربوط به آن‌ها ابزاری مناسب برای ارتباط با موجک‌ها در بخش‌های بعد خواهد بود.

موجک‌ها و شرط پذیرفتنی آن‌ها در نمادگذاری دیراک

تبدیل انتگرالی موجک از تابع f، بدین‌صورت تعریف می‌شود [۱۵]:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(a,b) &\equiv |a|^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^*\left(\frac{x-b}{a}\right)\ f(x)\\ &\equiv \langle \psi_{a,b}|f\rangle \equiv \psi_{a,b}^{\dagger}\ f.\end{aligned} \qquad (17)$$

در این رابطه تابع ψ، موجک مادر[1] نام دارد و $\psi_{a,b}$ نیز بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$\psi_{a,b} \equiv |a|^{-\frac{1}{2}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \qquad a \neq 0. \qquad (18)$$

در رابطهٔ (۱۷) توابع f و $\psi_{a,b}^*$ متعلق به $L^2(R)$ است و a پارامتر مقیاس و b پارامتر انتقال است. برای آن‌که بتوان وارون تبدیل موجک را تعریف کرد، موجک ψ باید در این شرط پذیرفتنی[2] صدق کند [۱۶]، [۱۷]:

$$C_{\psi} \equiv 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{|\omega|}|\hat{\psi}(\omega)|^2 < \infty, \qquad (19)$$

که در آن $\hat{\psi}(\omega)$ تبدیل فوریهٔ $\psi(x)$ است. این شرط را می‌توان به‌صورت $\hat{\psi}(0)=0$ نیز نوشت که تبدیل فوریهٔ آن، بدین‌صورت بیان می‌شود:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi(x) = 0. \qquad (20)$$

اگر $\psi(x)$ تابع فردی از x باشد، رابطهٔ بالا همواره برقرار است. از توابع زوجی که شرط پذیرفتنی را ارضا می‌کند، می‌توان به‌عنوان نمونه، موجک کلاه مکزیکی[3] را نام برد،

$$\psi_M(x) = \pi^{-\frac{1}{4}}(1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}. \qquad (21)$$

موجک کلاه مکزیکی یکی از ساده‌ترین موجک‌های شناخته شده است. این موجک مشتق دوم یک تابع گوسی است و تبدیل فوریهٔ آن به‌صورت $\hat{\psi}(\omega) = C'\omega^2\exp\left(-\frac{1}{2}\omega^2\right)$ است. نام‌گذاری این موجك بدین دلیل است که اگر این تابع را حول محور تقارنش بچرخانیم شکلی شبیه به کلاه مکزیکی به‌دست می‌آید. با توجه به حساسیت این موجک به تکینگی‌های موجود در سیگنال، از این موجك در تحلیل زمان-مقیاس تکینگی‌های سیگنال‌ها استفاده می‌گردد [۱۸]. از دیگر کاربردهای موجک مزبور می‌توان به تحلیل سیگنال‌های زمین‌لرزه [۱۹] و بازسازی میکرو موجی آسمان [۲۰] اشاره کرد.

۱. Mother Wavelet ۲. Admissibility condition ۳. Mexican hat wavelet

[Downloaded from jsci.khu.ac.ir on 2024-04-28]

با توجه به تعریف $|p\rangle$ در مکانیک کوانتومی و در نمایش دیراک، داریم [۲۱]، [۲۲]:

$$|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ipx}|x\rangle. \qquad (۲۲)$$

از رابطهٔ بالا در حالت $p=0$ این رابطهٔ به‌دست می‌آید:

$$|p=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx|x\rangle. \qquad (۲۳)$$

در این صورت، شرط پذیرفتنی (۲۰) در نمادگذاری دیراک بدین‌صورت به‌دست می‌آید [۱۸]،

$$\langle p=0|\psi\rangle = 0. \qquad (۲۴)$$

بنا بر این هر تابعی که در شرط بالا صدق کند، یک موجک خواهد بود.

۱. رابطه‌ای کلی برای به‌دست آوردن موجک‌های چندجمله‌ای

برای یافتن توابع زوجی که در شرط پذیرفتنی (۲۴) صدق می‌کنند (موجک باشند)، $|\psi\rangle$ را بر حسب حالت‌های عددی بسط می‌دهیم،

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} B_n|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle, \qquad (۲۵)$$

که در آن از رابطهٔ $|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$ استفاده کرده و داریم، $C_n = \frac{B_n}{\sqrt{n!}}$، بنا بر این کافی است C_nها را به‌گونه‌ای انتخاب کنیم که $|\psi\rangle$ شرط پذیرفتنی را ارضا کند.

از طرف دیگر، چنان‌که در بخش ۱ بیان شد، اگر حالت همدوس تعمیم‌یافته را به‌صورت $|z\rangle_g$ در نظر بگیریم،

با وارد کردن رابطهٔ تفکیک واحد کلی (۸) در شرط پذیرفتنی (۲۴) داریم:

$$\langle p=0|\psi\rangle = \int d\mu_z\, \langle p=0|z\rangle_g\, {}_g\langle z|\psi\rangle = 0. \qquad (۲۶)$$

همچنین در نمایش دیراک داریم [۲۳]،

$$|p\rangle = \pi^{-\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{1}{2}p^2 + \sqrt{2}\,ip\,\hat{a}^\dagger + \frac{\hat{a}^{\dagger 2}}{2}\right)|0\rangle, \qquad (۲۷)$$

و در حالت خاص $p=0$،

$$|p=0\rangle = \pi^{-\frac{1}{4}}\exp\left(\frac{\hat{a}^{\dagger 2}}{2}\right)|0\rangle = \pi^{-\frac{1}{4}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\hat{a}^{\dagger 2}/2\right)^m}{m!}|0\rangle. \qquad (۲۸)$$

با استفاده از رابطهٔ بالا داریم،

$$\langle p=0|z\rangle_g = \pi^{-\frac{1}{4}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2^m m!}\langle 0|\hat{a}^{2m}|z\rangle_g\ . \qquad (۲۹)$$

با استفاده از رابطهٔ (۲۵) نیز به‌دست می‌آید:

$${}_g\langle z|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, {}_g\left\langle z\left|\left(\hat{a}^\dagger\right)^n\right|0\right\rangle. \qquad (۳۰)$$

[Downloaded from jsci.khu.ac.ir on 2024-04-28]

بنا بر این با جای‌گذاری روابط (۲۹) و (۳۰) در رابطهٔ (۲۶) نتیجه می‌گیریم:

$$\langle p=0|\psi\rangle=\pi^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{C_n}{2^m m!}\int d\mu_z\,\langle 0|\hat{a}^{2m}|z\rangle_g\;{}_g\langle z|(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle=0. \qquad (31)$$

شکل نهایی شرط پذیرفتنی بالا کلی‌ترین رابطه برای به‌دست آوردن موجک‌های چندجمله‌ای با استفاده از حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته است. با قرار دادن حالت همدوس $|z\rangle_g$ و سنجهٔ $d\mu_z$ مربوط به رابطهٔ تفکیک واحد آن می‌توان موجک‌ها را به‌دست آورد.

۲. رابطه‌ای کلی برای به‌دست آوردن موجک‌های چندجمله‌ای با استفاده از حالت‌های همدوس غیرخطی

چنان‌که در بخش ۱ بیان شد حالت همدوس غیرخطی برحسب حالت‌های عددی، با این رابطه داده می‌شود:

$$|z,\ f\rangle=N_f\left(|z|^2\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}\,[\,f(n)]!}|n\rangle,\qquad z\in\mathbb{C}. \qquad (32)$$

برای به‌دست آوردن شرط (۳۱) به محاسبهٔ $\langle 0|\hat{a}^{2m}|z,\ f\rangle$ و $\langle z,\ f|(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$ می‌پردازیم،

$$\begin{aligned}\langle 0|\hat{a}^{2m}|z,\ f\rangle&=N_f\left(|z|^2\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}\,[f(n)]!}\langle 0|\hat{a}^{2m}|n\rangle\\&=N_f\left(|z|^2\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{z^{2m}}{[f(2m)]!},\end{aligned} \qquad (33)$$

$$\begin{aligned}\langle z,\ f|(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle&=N_f\left(|z|^2\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z^*)^n}{\sqrt{n!}\,[f(n)]!}\langle n|(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle\\&=N_f\left(|z|^2\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{(z^*)^n}{[f(n)]!}.\end{aligned} \qquad (34)$$

با قرار دادن روابط (۳۳) و (۳۴) در رابطهٔ (۳۱) ، رابطه‌ای کلی برای محاسبهٔ موجک‌های چندجمله‌ای با استفاده از حالت‌های همدوس غیرخطی به‌دست می‌آید:

$$\langle p=0|\psi\rangle=\pi^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{C_n}{2^m\,m!}\frac{1}{[f(n)]!\,[f(2m)]!}\int d\mu_z\;N_f\left(|z|^2\right)^{-1}(z^*)^n\;z^{2m}=0. \qquad (35)$$

در بخش بعد، به‌عنوان مثال، به محاسبهٔ موجک‌های چندجمله‌ای با استفاده از حالت‌های همدوس غیرخطی نوسان‌گر هماهنگ روی سطح تخت خواهیم پرداخت.

۳. موجک‌های چندجمله‌ای با استفاده از حالت‌های همدوس غیرخطی نوسانگر هماهنگ روی سطح تخت

چنان‌که در بخش ۱ دیدیم، با توجه به متناهی بودن بعد فضای هیلبرت حالت‌های همدوس $|z\rangle_f$ [رابطهٔ (۱۵)]، بسط (۲۵) در فضای هیلبرت با بعد متناهی بدین‌صورت است:

$$|\psi\rangle=\sum_{n=0}^{N}B_n|n\rangle=\sum_{n=0}^{N}C_n(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle, \qquad (36)$$

[Downloaded from jsci.khu.ac.ir on 2024-04-28]

و چنان‌که گفتیم، C_n ها باید طوری انتخاب شوند که $|\psi\rangle$ شرط پذیرفتنی را ارضا کند.

با وارد کردن رابطهٔ تفکیک واحد (۱۶) در شرط پذیرفتنی (۲۴) داریم،

$$\langle p=0|\psi\rangle=\frac{N+1}{\pi}\int\frac{d^2z}{\left(1+|z|^2\right)^2}\langle p=0|z\rangle_f\ {}_f\langle z|\psi\rangle=0. \qquad (۳۷)$$

با استفاده از حالت همدوس مربوط به فضای تخت [رابطهٔ (۱۵)] و رابطهٔ (۲۸) داریم:

$$\langle p=0|z\rangle_f=\pi^{-\frac{1}{4}}\left(1+|z|^2\right)^{-\frac{N}{2}}\sum_{m=0}^{N}\frac{z^{2m}}{2^m m!}\sqrt{\frac{N!}{(N-2m)!}}. \qquad (۳۸)$$

با به‌کار بردن رابطهٔ حالت همدوس روی سطح تخت و معادلهٔ (۳۶) نیز به‌دست می‌آید:

$${}_f\langle z|\psi\rangle=\left(1+|z|^2\right)^{-\frac{N}{2}}\sum_{n=0}^{N}C_n(z^*)^n\sqrt{\frac{N!}{(N-n)!}}. \qquad (۳۹)$$

حال با جای‌گذاری روابط بالا در رابطهٔ (۳۷) نتیجه می‌گیریم:

$$\langle p=0|\psi\rangle=\frac{N+1}{\pi^{\frac{5}{4}}}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N}\frac{C_n}{2^m m!}\frac{N!}{\sqrt{(N-n)!(N-2m)!}}\int d^2z\,\frac{(z^*)^n z^{2m}}{(1+|z|^2)^{(N+2)}}=0. \qquad (۴۰)$$

با توجه به این نکته که z عددی مختلط است و با استفاده از جداول انتگرال‌گیری [۲۴]، جواب انتگرال بالا بدین صورت به‌دست می‌آید:

$$\int d^2z\,\frac{(z^*)^n z^{2m}}{(1+|z|^2)^{(N+2)}}=\pi\,\delta_{2m,n}\,\frac{(2m)!\,(N-2m)!}{(N+1)!}. \qquad (۴۱)$$

با جای‌گذاری جواب انتگرال در رابطهٔ (۴۰) نتیجه بدین‌صورت حاصل می‌شود:

$$\langle p=0|\psi\rangle=\pi^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{N}\frac{(2n)!}{n!2^n}C_{2n}=0. \qquad (۴۲)$$

دیده می‌شود که این رابطه تنها روی ضرایب حالت‌های عددی زوج قید وارد می‌کند که با توجه به شرط پذیرفتنی (۲۰) که برای توابع فرد به‌صورت بدیهی برقرار است، قابل توجیه است.

محاسبات

در ادامه با مشخص کردن چند N خاص (بعد فضای هیلبرت با بعد متناهی)، به‌دنبال موجک‌های زوجی می‌گردیم که در رابطهٔ پذیرفتنی صدق کنند. بدین‌ترتیب، ضرایب حالت‌های عددی فرد، با توجه به‌این‌که به‌طور بدیهی شرط پذیرفتنی را برآورده می‌کنند، از محاسبات حذف می‌گردند. از رابطهٔ زیر نیز در انجام محاسبات بهره می‌گیریم [۲۱]، [۲۲]:

$$\langle x|n\rangle=\frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}H_n(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad (۴۳)$$

که در آن، $H_n(x)$ ها چندجمله‌ای‌های هرمیت هستند،

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}. \qquad (۴۴)$$

[Downloaded from jsci.khu.ac.ir on 2024-04-28]

هم‌چنین، از آن‌جاکه روی ضرایب فرد قیدی وجود ندارد، برای سادگی در محاسبات آن‌ها را صفر در نظر می‌گیریم.

در انجام محاسبات این مراحل را طی می‌کنیم:

۱) ابتدا مقدار N را تعیین می‌کنیم.

۲) با استفاده از معادلهٔ (۴۲) ، رابطهٔ بین ضرایب C_{2n} را می‌نویسیم.

۳) در این مرحله با استفاده از رابطهٔ (۳۶) ، $|\psi\rangle$ را با توجه به N تعیین شده، بسط می‌دهیم.

۴) اکنون با توجه به تعریف $\psi(x)$ (که ضرب داخلی $|\psi\rangle$ در $\langle x|$ است)، رابطهٔ (۴۳) و $|\psi\rangle$، به موجک $\psi(x)$ برحسب توابع هرمیت خواهیم رسید.

۵) حال با توجه به رابطهٔ بین ضرایب و با صفر قرار دادن C_{2n} هایی که $2n > N$ است، بقیهٔ ضرایب را تعیین می‌کنیم.

۶) سرانجام با توجه به ضرایب تعیین شده، تعریف چندجمله‌ای‌های هرمیت [رابطهٔ (۴۴)] و $\psi(x)$ به‌دست آمده بر حسب توابع هرمیت، تابع $\psi(x)$ که همان موجک موردنظر است، استخراج می‌شود.

در ادامه به‌عنوان نمونه، توابع $\psi(x)$ را به‌ازای $N = 0,1,\ldots,7$ به‌دست می‌آوریم:

برای $N = 0$ و $N = 1$ تابع $\psi(x) = 0$ به‌دست می‌آید.

برای $N = 2$ و $N = 3$ نیز با استفاده از رابطهٔ (۳۶) داریم،

$$N = 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_0 + C_2 + 3C_4 = 0, \\ |\psi\rangle = C_0|0\rangle + C_0|1\rangle + \sqrt{2!}\, C_2|2\rangle, \\ \psi(x) = \langle x|\psi\rangle = C_0\langle x|0\rangle + \sqrt{2!}\, C_2\langle x|2\rangle \\ \qquad = \pi^{-\frac{1}{4}} C_0 H_0(x) e^{-\frac{x^2}{2}} + \pi^{-\frac{1}{4}}\sqrt{2!}\, C_2 H_2(x) e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{cases} \tag{45}$$

$$N = 3 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_0 + C_2 + 3C_4 + 15C_6 = 0, \\ |\psi\rangle = C_0|0\rangle + C_1|1\rangle + \sqrt{2!}\, C_2|2\rangle + \sqrt{3!}\, C_3|3\rangle, \\ \psi(x) = \langle x|\psi\rangle = C_0\langle x|0\rangle + \sqrt{2!}\, C_2\langle x|2\rangle, \\ \psi(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} C_0 H_0(x) e^{-\frac{x^2}{2}} + \pi^{-\frac{1}{4}}\sqrt{2!}\, C_2 H_2(x) e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{cases} \tag{46}$$

چنان‌که مشاهده می‌شود حالت‌های $N = 2$ و $N = 3$ ، با وجود این‌که $|\psi\rangle$ های متفاوت دارند، دارای $\psi(x)$ یکسان هستند. با انتخاب،

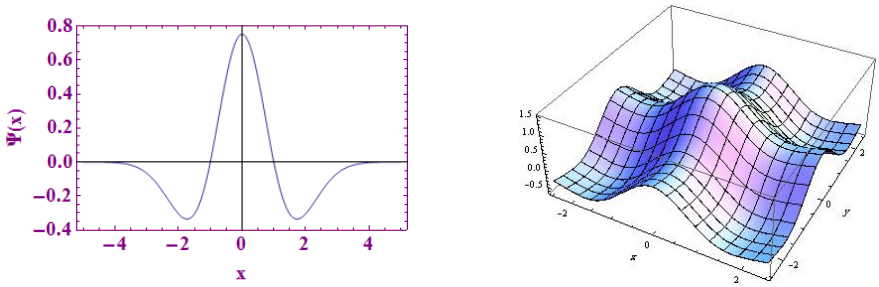
$$\begin{cases} C_0 = -C_2 = \frac{1}{2}, \\ C_4 = C_6 = 0, \end{cases} \tag{47}$$

و با استفاده از رابطهٔ (۴۴) ، نتیجه به‌دست آمده موجک کلاه مکزیکی خواهد بود،

[Downloaded from jsci.khu.ac.ir on 2024-04-28]

$$\psi(x)=\pi^{-\frac{1}{4}}\left(1-x^{2}\right)e^{-\frac{x^{2}}{2}}, \tag{48}$$

که در شکل ۱ رسم شده است.



شکل ۱. شکل ۲ بعدی و ۳ بعدی موجک کلاه مکزیکی، که به‌ازای $N=2$ و یا $N=3$ به‌دست می‌آید

برای $N=4$ و $N=5$ نیز داریم:

$$N=4 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_0+C_2+3C_4+15C_6+70C_8=0, \\ |\psi\rangle=C_0|0\rangle+C_1|1\rangle+\sqrt{2!}\,C_2|2\rangle+\sqrt{3!}\,C_3|3\rangle+\sqrt{4!}\,C_4|4\rangle, \\ \psi(x)=\langle x|\psi\rangle=C_0\langle x|0\rangle+\sqrt{2!}\,C_2\langle x|2\rangle+\sqrt{4!}\,C_4\langle x|4\rangle, \\ \psi(x)=\pi^{-\frac{1}{4}}C_0H_0(x)e^{-\frac{x^2}{2}}+\pi^{-\frac{1}{4}}\sqrt{2!}\,C_2H_2(x)e^{-\frac{x^2}{2}}+\pi^{-\frac{1}{4}}\sqrt{4!}\,C_4H_4(x)e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{cases} \tag{49}$$

$$N=5 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_0+C_2+3C_4+15C_6+70C_8+945C_{10}=0, \\ |\psi\rangle=C_0|0\rangle+C_1|1\rangle+\sqrt{2!}\,C_2|2\rangle+\sqrt{3!}\,C_3|3\rangle+\sqrt{4!}\,C_4|4\rangle+\sqrt{5!}\,C_5|5\rangle, \\ \psi(x)=\langle x|\psi\rangle=C_0\langle x|0\rangle+\sqrt{2!}\,C_2\langle x|2\rangle+\sqrt{4!}\,C_4\langle x|4\rangle, \\ \psi(x)=\pi^{-\frac{1}{4}}C_0H_0(x)e^{-\frac{x^2}{2}}+\pi^{-\frac{1}{4}}\sqrt{2!}\,C_2H_2(x)e^{-\frac{x^2}{2}}+\pi^{-\frac{1}{4}}\sqrt{4!}\,C_4H_4(x)e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{cases} \tag{50}$$

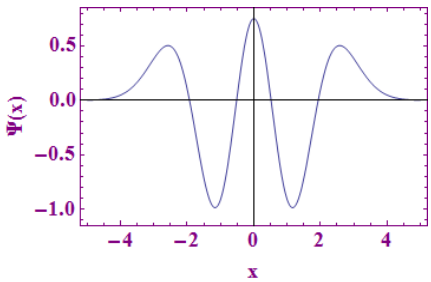
برای حالت مزبور، با انتخاب

$$\begin{cases} C_0=-1, \quad C_2=-2, \\ C_6=C_8=C_{10}=0, \end{cases} \tag{51}$$

$C_4=1$ به‌دست می‌آید و موجک به‌دست آمده بدین‌صورت است:

$$\psi(x)=4\pi^{-\frac{1}{4}}\left(x^{4}-4x^{2}+1\right)e^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{52}$$

و در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲. موجک چندجمله‌ای، که به‌ازای $N=4$ و یا $N=5$ به‌دست می‌آید

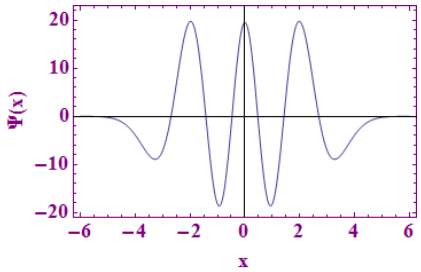
[Downloaded from jsci.khu.ac.ir on 2024-04-28]

با انتخاب $N=٦$ و یا $N=٧$ و تکرار فرایند بالا و با انتخاب،

$$\begin{cases} C_{٠}=١, \quad C_{٢}=٢, \quad C_{٤}=٤, \\ C_{٨}=C_{١٠}=C_{١٢}=C_{١٤}=٠, \end{cases} \qquad (٥٣)$$

$C_{٦}=-١$ به‌دست آمده و موجک حاصل بدین‌صورت است (شکل ٣):

$$\psi(x)=\pi^{-\frac{١}{٤}}\left(-٨x^{٦}+٧٦x^{٤}-١٣٤x^{٢}+٢٦\right)e^{-\frac{x^{٢}}{٢}}. \qquad (٥٤)$$



شکل ٣. موجک چندجمله‌ای، که به‌ازای $N=٦$ و یا $N=٧$ به‌دست می‌آید

بدین ترتیب می‌توان با در نظر گرفتن N های گوناگون، توابع موجک زوجی یافت که در شرط پذیرفتنی صدق می‌کنند. از این رو، رابطهٔ (٤٢) را می‌توان برای به‌دست آوردن چندجمله‌ای‌هایی که شرط موجک بودن را برآورده می‌کند، استفاده نمود.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، به معرفی موجک‌ها و حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته پرداختیم. سپس با استفاده از حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته و حالت‌های همدوس غیرخطی، نمادگذاری دیراک و بهره‌گیری از شرط پذیرفتنی، رابطه‌ای کلی برای موجک‌های چندجمله‌ای یافتیم. سپس به‌عنوان نمونه به ساخت موجک‌های چندجمله‌ای مرتبط با حالت‌های همدوس غیرخطی روی سطح تخت پرداختیم.

با استفاده از این روش، می‌توان به بررسی موجک‌های چندجمله‌ای دیگر با استفاده از حالت‌های همدوس دارای رابطهٔ تفکیک واحد همانند حالت‌های همدوس گروه $SU(٢)$، $SU(١,١)$، $SU_q(٢)$ و $SU_q(١,١)$، پرداخت.

قدردانی

نویسندگان، تشکر خود را از معاونت تحصیلات تکمیلی دانشگاه شهرکرد برای حمایت‌های انجام شده اعلام می‌دارند.

منابع

1. O. Christensen, K. L. Christensen, "Approximation Theory From Taylor Polynomials to Wavelets", Technical University of Denmark, Birkhauser Boston (2004).
2. S. T. Ali, J-P. Antoni, J-P. Gazeau, "Coherent State, Wavelets and Their Generalizations", Springer, New York (2000).

[Downloaded from jsci.khu.ac.ir on 2024-04-28]

3. W. C. Lang, K. Forinash, "Time-frequency analysis with the continuous wavelet transform", Am. J. Phys. 66, 9 (1998).

4. S. Lahmiri, Int. J. Com. Sci. Eng. App. 1, 13 (2011).

5. J. Rafiee, P. W. Tse, M. H. Sadeghi, Exp. Sys. Appl. 36, 4862 (2009).

6. N. Ahuja, S. Lertrattratapanich, N. K. Bose, Proc. Inst. Elec. Eng.-Vis., Signal Process., 152, 659 (2005).

7. E. Shrodinger, Naturwissenschaften 14, 664 (1926).

8. C. H. Hsiao, Int. J. Comp. Math., 87, 3 (2010).

۹. علی مهدی‌فر، *ساختار هندسی حالت‌های همدوس غیرخطی*، پایان‌نامهٔ دکتری، دانشکدهٔ علوم، دانشگاه اصفهان، (۱۳۸٦).

10. A. M. Perelomov, "Generalized Coherent States And Their Applications", Berlin, Springer (1986).

11. W. Hardle, G. Kerkyacharian, "Wavelets, Approximation and Statistical Applications", Seminaire Paris-Berlin, (2010).

12. A. Mahdifar, R. Roknizadeh, M. H. Naderi, J. Phys. A: Math. Gen. 39, 7003 (2006).

13. L. M. Kuang. F. B. Wang, Y. G. Zhou, Phys. Lett. A 183, 1, 1993; J. Mod. opt. 41, 1307 (1994).

14. A. Fitouhi, N. Bettaibi, J. Non. Math. Phys. 13, 3, (2006).

15. J. C. Van den Berg,"Wavelets in physics", Cambridge Univ. press, Cambridge (1999).

16. G. Kaiser, "A friendly guide to wavelets", Massachusetts Univ. Lowell, MAO1854 (1994).

17. L-Y. Hu and H-Y. Fan. J. Mod. Opt. 55, 11 (2008).

۱۸. زهرا بهرامی، *موجک‌ها و کاربرد آن‌ها در فیزیک اتمی ملکولی*، پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه شهرکرد، (۱۳۹۰).

19. Z. Zhou, H. Adeli, J. Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering. 18, 379 (2003).

20. R. B.Vielva, M.P. Barreiro; Mon. Not. Royal Astr. Soc. 328, 1 (2001).

21. J. J. Sakurai, "Modern Quantum Mechanics", Addison-Wesley (1994).

22. P. Z. Daffery, H. Kaneko, Appl. Anal..85, 10 (2006).

23. H-Y. Fan, H-L. LU, Optics letters, 31, 407 (2006).

24. I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, "Table of Integrals, Series, and Products", 7nd ed., California, USA, 325, 340 (2007).

[Downloaded from jsci.khu.ac.ir on 2024-04-28]