نشریه علوم دانشگاه خوارزمی
جلد ۱۲، شماره ۱
تاریخ چاپ زمستان ۱۳۹۱

حل برخی مسائل معکوس سهموی به‌روش تجزیهٔ آدومیان

معصومه حسینی‌نیا، *علی‌مردان شاه‌رضایی: دانشگاه الزهرا، دانشکده ریاضی

چکیده

در این مقاله سه نوع از مسائل معکوس سهموی از نوع هدایت گرمایی و تشعشع گرمایی به‌روش تجزیهٔ‌آدومیان بررسی می‌شود و برای حل این نوع مسائل معکوس از یک شرط فوق اضافی در یک نقطه داخلی ناحیه مفروض مسئله استفاده می‌شود. این روش با سرعت همگرایی بالا، تقریب عددی از جواب دقیق مسئله بدون نیاز به خطی‌سازی یا گسسته‌سازی ارایه می‌دهد. در واقع روش تجزیه آدومیان، نیاز به حل کردن هر سیستم خطی یا غیرخطی از معادلات جبری را از بین می‌برد. نتایج عددی به‌دست آمده از این روش حاکی از دقت و سرعت زیاد این روش است.

مقدمه

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در ارتباط با مسائل گوناگون فیزیکی و هندسی که شامل توابعی هستند که به دو یا چند متغیر مستقل بستگی دارند، مطرح می‌شوند. بسیاری از مسائل فیزیکی و مهندسی را می‌توان با معادلات دیفرانسیل معمولی مدل‌سازی کرد و حال آن‌که تعداد زیادی از مسائل مکانیک، سیالات و جامدات، انتقال حرارت، نظریه الکترومغناطیس، مکانیک کوانتوم و دیگر زمینه‌های فیزیکی و علوم به معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی منجر می‌شوند. زمینه‌های کاربردی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در مقایسه با معادلات دیفرانسیل معمولی عظیم‌تر است که جواب‌هایی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و معادلات دیفرانسیل معمولی به‌وسیلهٔ نویسندگان مختلف بیان شده است [۱]، [۲]. آدومیان، اولین کسی بود که روش تجزیهٔ آدومیان را در سال ۱۹۸۱ برای حل معادلات عملگری خطی تصادفی ارائه کرد. مباحث مطرح شده توسط وی در قالب مجموعه‌ای مدون برای اولین بار در سال ۱۹۸۳ به‌چاپ رسید. این روش بین سال‌های ۱۹۸۱ الی ۱۹۹۲ به سرعت برای حل پاره‌ای از مسائل غیرخطی فراگیر شد [۳]. پرفسور ایو در اوایل سال ۱۹۸۹بحث همگرایی روش را برای اولین بار مطرح کرد. نتایج بیش‌تر در مورد همگرایی روش و بحث نظری در مورد ایدهٔ نظریهٔ تجزیه آدومیان در سال ۱۹۹۲ بیان شده است [۴].

واژه‌های کلیدی: مسئلهٔ معکوس سهموی، روش تجزیهٔ آدومیان، تابع کنترلی، ضریب مجهول، شرایط کرانه‌ای مجهول، معادله انتگرال ولترا

دریافت ۸۹/۱۲/۷ پذیرش۹۱/۷/۲۴

*نویسنده مسئول am_shahrezaee@yahoo.com

در مسائل مربوط به معادلات با مشتقات جزئی معمولاً با مسئله‌ای مواجه هستیم که در آن، شرایط مسئله یعنی شرایط اولیه و کرانه‌ای مشخص هستند و در معادلهٔ اصلی فقط تابع اصلی معادله، مجهول است. در واقع در مسئله فقط یک عامل مجهول وجود دارد. این‌گونه مسائل، مسائل مستقیم نامیده می‌شود.

در مقابل، دستهٔ دیگری از مسائل وجود دارند که در آن‌ها علاوه بر عامل اصلی مجهول در معادله، مشخصه‌های دیگری نیز در معادله و یا در شرایط کرانه‌ای آن وجود دارند. این گونه مسائل را مسائل معکوس می‌نامند. در واقع در این مسائل یکی از مشخصه‌های تعریف کنندهٔ خود مسئله، مجهول است. دسته‌ای مهم از این مسائل، مسئلهٔ هدایت گرمایی معکوس است که از نوع مسائل سهموی معکوس است. این مسئله کاربردهای زیادی در شاخه‌های مختلف مهندسی و علوم مانند مهندسی مکانیک، مهندسی پزشکی و فیزیک دارد. مسئلهٔ معکوس سهموی به‌وسیله متخصصان و محققان زیادی بررسی شده است و شیوه‌های مختلفی برای حل این مسئله ارائه شده است [۵] که شامل بخش‌های ذیل است:

بخش ۲ که روش تجزیهٔ آدومیان و همگرایی آن را بررسی می‌کنیم. در بخش۳ به حل مسائل سهموی معکوس با شرایط کرانه‌ای مجهول می‌پردازیم. بخش ٤ به حل مسائل معکوس سهموی با تابع کنترلی مجهول اختصاص دارد. حل مسائل هدایت گرمایی معکوس غیرهمگن با تابع کنترلی مجهول در بخش٥ بررسی می‌شود. با ارائه مثال‌های متمایز و مقایسهٔ حل آن‌ها به روش تجزیهٔ آدومیان با روش‌های دیگر در این سه بخش بررسی می‌شود. در پایان، بخش ٦ به نتیجه‌گیری پرداخته شده است.

روش تجزیهٔ آدومیان و همگرایی آن

حل مسائل غیرخطی در معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی و همچنین پاره‌ای از مسائل کاربردی در ریاضی فیزیک از گذشته مورد توجه بسیاری از ریاضیدانان بوده است. اکثر روش‌هایی که در دو دهه گذشته برای حل مسائل غیرخطی استفاده شده‌اند، بر مبنای اصول خطی‌سازی، اختلالات جزئی گسسته‌سازی استواراند.

معادله تابعی [۶]:

$$L[u(x_1,x_2,\cdots,x_n)]+N[u(x_1,x_2,\cdots,x_n)]+R[u(x_1,x_2,\cdots,x_n)]=g(x_1,x_2,\cdots,x_n), \qquad (۱)$$

را در نظر می‌گیریم که در آن L یک عملگر خطی از بالاترین مرتبهٔ مشتق از مرتبه k، R قسمت باقی‌مانده عملگر خطی، N یک عملگر غیرخطی و تابع g مفروض است. با فرض آنکه L^{-1}، معکوس عملگر L باشد، آن را به‌صورت $L^{-1}(.)=\int\cdots\int(.)dx_j\cdots dx_j$ تعریف می‌کنیم (فرض می‌کنیم عمل انتگرال‌گیری k مرتبه باشد) آن‌گاه جواب معادله بدین‌صورت است:

$$u(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)-L^{-1}[N[u(x_1,x_2,\cdots,x_n)]] \qquad (۲)$$
$$-L^{-1}[R[u(x_1,x_2,\cdots,x_n)]],$$

که درآن $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ از انتگرال‌گیری تابع $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ و با استفاده از شرایط اولیه- کرانه‌ای مفروض به‌دست می‌آید یعنی:

$$\begin{aligned} u(x_1,x_2,\cdots,x_{j-1},0,x_{j+1},\ldots,x_n) &= f_0(x_1,x_2,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n),\\ \frac{\partial u(x_1,x_2,\cdots,x_{j-1},0,x_{j+1},\ldots,x_n)}{\partial x_j} &= f_1(x_1,x_2,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n),\\ &\vdots\\ \frac{\partial^{k-1} u(x_1,x_2,\cdots,x_{j-1},0,x_{j+1},\ldots,x_n)}{\partial x_j^{k-1}} &= f_{k-1}(x_1,x_2,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n). \end{aligned}$$

آن‌گاه داریم:

$$\begin{aligned} \psi(x_1,x_2,\cdots,x_n) &= u(x_1,x_2,\cdots,x_{j-1},0,x_{j+1},\ldots,x_n)+\ldots\\ &+\frac{x_j^{k-1}}{(k-1)!}\frac{\partial^{k-1} u(x_1,x_2,\cdots,x_{j-1},0,x_{j+1},\ldots,x_n)}{\partial x_j^{k-1}}\\ &= f_0+x_j\, f_1+\ldots+\frac{x_j^{k-1}}{(k-1)!}\; f_{k-1}, \end{aligned}$$

و

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)+L^{-1}[g(x_1,x_2,\cdots,x_n)].$$

روش تجزیهٔ آدومیان عبارت است از نمایش u به‌صورت:

$$u(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{m=0}^{\infty}u_m(x_1,x_2,\cdots,x_n), \tag{۳}$$

و تجزیهٔ عمل‌گر غیرخطی به شکل:

$$N[u(x_1,x_2,\cdots,x_n)]=\sum_{m=0}^{\infty}A_m(x_1,x_2,\cdots,x_n), \tag{۴}$$

است که در آن A_m ها را چندجمله‌ای‌های آدومیان می‌نامند [۷].

اکنون با قرار دادن روابط (۳) و (۴) در رابطهٔ (۲) به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty}u_m(x_1,x_2,\cdots,x_n) &= f(x_1,x_2,\cdots,x_n)-L^{-1}[\sum_{m=0}^{\infty}A_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)]\\ &-L^{-1}[R[\sum_{m=0}^{\infty}u_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)]]. \end{aligned}$$

حال قرار می‌دهیم:

$$u_0(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

در این صورت، دیگر جملات سری با استفاده از الگوریتم زیر معین می‌گردد:

$$\begin{aligned} u_1(x_1,x_2,\cdots,x_n) &= -L^{-1}[R\,u_0]-A_0,\\ u_2(x_1,x_2,\cdots,x_n) &= -L^{-1}[R\,u_1]-A_1,\\ &\vdots\\ u_n(x_1,x_2,\cdots,x_n) &= -L^{-1}[R\,u_{n-1}]-A_{n-1}. \end{aligned}$$

لذا مادامی که A_n ها برای $n=0,1,\dots$ معین باشند، تمامی مولفه‌های u محاسبه می‌شوند. آن‌گاه تقریب n جمله‌ای ϕ_n را برای u چنین تعریف می‌کنیم [۸]:

$$\phi_n=\sum_{m=0}^{n-1}u_m\,, \qquad \lim_{n\to\infty}\phi_n=u.$$

لذا برای اثبات همگرایی روش تجزیهٔ آدومیان، به بیان تعریف چندجمله‌ای‌های آدومیان و قضیهٔ مربوطه می‌پردازیم.

تعریف۱.۲: فرض کنید N عملگر غیرخطی و یک تابع تحلیلی و $\sum u_n$ یک سری همگرا در فضای باناخ E باشد. چندجمله‌ای‌های آدومیان را چنین تعریف می‌کنیم [۹]:

$$A_n=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left(N\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k\right)\right)\Bigg|_{\lambda=0}; \quad n=0,1,2,\cdots.$$

برای مثال، اولین چندجمله‌ای‌های آدومیان عبارت است از:

$$\begin{aligned}
A_0&=N[u_0],\\
A_1&=u_1N'[u_0],\\
A_2&=u_2N'[u_0]+\frac{1}{2}u_1^2N''[u_0],\\
A_3&=u_3N'[u_0]+u_1u_2N''[u_0]+\frac{1}{3!}u_1^3N'''[u_0],\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

قضیه۲.۲: اگر $N\in C^\infty$ (در یک همسایگی از u_0) و این دوشرط برقرار باشند [۴]:

۱. $\forall n\in N,\ \|N^{(n)}(u_0)\|\le M'$ ۲. $\|u_i\|\le M\ ;i=1,2,\dots$

($\|.\|$، نرم در فضای هیلبرت H)، آن‌گاه سری $\sum_{n=0}^{\infty}A_n$ به‌طور مطلق همگرا است و $\|A_n\|\le M'M^n e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}}$.

همچنین اگر فضای هیلبرت H به‌صورت $H=L^2((\alpha\times\beta)\times[0,T])$ و $u:(\alpha\times\beta)\times[0,T]\to R$ تابعی با شرط $\int_{(\alpha\times\beta)\times[0,T]}u^2\,ds\,d\tau\le\infty$ و ضرب برداری $(u,v)_H=\int_{(\alpha\times\beta)\times[0,T]}u\times v\,ds\,d\tau\le\infty$ و نرم $\|u\|_H^2=\int_{(\alpha\times\beta)\times[0,T]}u^2\,ds\,d\tau\le\infty$ و نیز معادله تابعی

$$Lu+Ru+Nu=g; \qquad Tu=Ru+Nu,$$

مفروض باشند آن‌گاه روش تجزیهٔ آدومیان همگرا است در صورتی که این دو شرط برقرار باشد [۴]:

۱. $\exists k^*>0:\forall u,v\in H\Rightarrow(T(u)-T(v),u-v)\ge k^*\|u-v\|^2,$

۲. $\forall M\ge0\,\exists C(M)>0:\forall u,v\in H,\|u\|\le M,\|v\|\le M\Rightarrow$
$(T(u)-T(v),w)\ge C(M)\|u-v\|\|w\|,\forall w\in H.$

مسائل سهموی معکوس با شرایط کرانه‌ای مجهول

مسئلهٔ سهموی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u_t = u_{xx}; \qquad 0<x<1, \quad 0<t<T_0, \tag{۵}$$

$$u(x,0) = f(x); \quad 0<x<1, \tag{۶}$$

$$u(0,t) = g(t); \qquad 0<t<T_0, \tag{۷}$$

$$u_x(1,t) = h(t); \qquad 0<t<T_0, \tag{۸}$$

که در آن عدد T_0 ثابت و سنسور در نقطهٔ داخلی از ناحیهٔ مفروض مسئله یعنی x_1، $0<x_1<1$، برای اندازه‌گیری درجهٔ حرارت قرار دارد. f تابع تکه‌ای پیوستهٔ معلوم، h تابع به‌اندازهٔ کافی مشتق‌پذیر است در حالی‌که درجه حرارت $u(x,t)$ و شار گرمایی (جریان گرمایی) $u_x(0,t)$ و $g(t)$ مجهول‌اند که برای تعیین کردن باقی می‌مانند. برای تعیین مقدار شار، شرط فوق اضافی

$$u(x_1,t) = k(t), \tag{۹}$$

در نظر گرفته می‌شود که در آن k تابعی معلوم است. مسئلهٔ (۵) تا (۹) را در دو زیر بازهٔ $x_1<x<1$ و $0<x<x_1$ برای مقادیر $0<t<T_0$، به دو مسئلهٔ مجزای مستقیم و معکوس تقسیم می‌کنیم.

به‌دست آوردن شارگرمایی در سطح گرم شده از یک شاتل فضایی یا یک موشک فضاپیما که به زمین بازگشته است، یک مثال از کاربردهای مسئلهٔ هدایت گرمایی معکوس است. از دیگر کاربردهای مسئلهٔ هدایت گرمایی معکوس می‌توان به این موارد اشاره کرد:

شاخه‌هایی از علم که به بررسی پرتاب موشک، پروازهای فضایی، صنعت هواپیماسازی، ساخت موتورهای پرتوان، فلزشناسی، مهندسی شیمی می‌پردازد، همچنین اکتشافات نفت، سنجیدن غیرمخرب مواد، تعیین ساختارهای داخلی زمین از کاربردهای دیگر این مسئله است. حرارت دادن متناوب در جنگ افزارهای اشتعال موتورهای داخلی سوخت، انجماد یافتن شیشه، گرماسنجی غیرمستقیم برای استفاده آزمایشگاهی و مطالعات منحنی گذرای جوش، تعیین خواص گرمایی پلیمرها در رشتهٔ مهندسی پزشکی نیز از دیگر موارد کاربردها است [۱۰].

قضیهٔ ۳.۲ (وجود و یکتایی): فرض کنیم توابع f و h در دامنه‌هایشان، توابع به‌طور تکه‌ای پیوسته باشند. تابع

$$u(x,t) = \omega(x,t) - 2\int_0^t \theta(x,t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau + 2\int_0^t \theta(x-1,t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau,$$

که در آن داریم:

$$\omega(x,t) = \int_0^1 (\theta(x-\xi,t) + \theta(x+\xi,t)) f(\xi)\, d\xi,$$

و $\theta(x,t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} K(x+2m,t)$ و جواب بنیادی $K(x,t)$ به‌صورت

$$K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}; \quad t>0,$$

تعریف می‌شود، جواب یکتای مسئلهٔ (۵) تا (۹) است اگر و تنها اگر تابع پیوسته k، در شرط

$$k(t)=\omega(x_1,t)-2\int_0^t\theta(x_1,t-\tau)\,d\tau+2\int_0^t\theta(x_1-1,t-\tau)\,h(\tau)\,d\tau,$$

صدق کند [۱۳].

مسئلهٔ مستقیم که در ناحیهٔ $\{(x,t)|x_1<x<1,\quad 0<t<T_0\}$ تعریف می‌شود، عبارت است از:

$$u_t=u_{xx}\,;\quad 0<x_1<x<1,\quad 0<t<T_0, \tag{۱۰}$$

$$u(x,0)=f(x);\quad x_1<x<1, \tag{۱۱}$$

$$u_x(1,t)=h(t);\quad 0<t<T_0, \tag{۱۲}$$

$$u(x_1,t)=k(t);\quad 0<t<T_0, \tag{۱۳}$$

و مسئلهٔ معکوس که در ناحیهٔ $\{(x,t)|0<x<x_1,\quad 0<t<T_0\}$ قرار دارد، برابر است با:

$$u_t=u_{xx}\,;\quad 0<x<x_1,\quad 0<t<T_0, \tag{۱۴}$$

$$u(x,0)=f(x);\quad 0<x<x_1, \tag{۱۵}$$

$$u(x_1,t)=k(t);\quad 0<t<T_0, \tag{۱۶}$$

که مسئلهٔ معکوس از نوع کوشی است. برای حل مسئلهٔ (۵) تا (۹) به روش تجزیهٔ آدومیان، ابتدا با استفاده از مسئلهٔ معکوس (۱۴) تا (۱۶) مقادیر تقریبی $u_x(0,t)$ و $u(0,t)$ را به‌دست می‌آوریم. بدین ترتیب که برای یافتن $u_x(0,t)$، از دو طرف معادلG (۱۴) یک‌بار نسبت به x و برای یافتن $u(0,t)$، دوبار نسبت به x از معادلهٔ (۱۴) در بازهٔ $[0,x_1]$ انتگرال می‌گیریم. در نتیجه خواهیم داشت:

$$u_x(0,t)=u_x(x_1,t)-\int_0^{x_1}u_t\,dx, \tag{۱۷}$$

و

$$u(0,t)=u(x_1,t)-x_1u_x(0,t)-\int_0^{x_1}\int_0^{x}u_t\,dx\,dx. \tag{۱۸}$$

چنان‌که مشاهده می‌کنیم مقدار $u(x,t)$ در دو رابطهٔ بالا مجهول است. برای یافتن مقدار $u(x,t)$، از مسئلهٔ مستقیم (۱۰) تا (۱۳) استفاده می‌کنیم. بدین ترتیب که نخست از هر دو طرف معادله (۱۰) نسبت به t انتگرال می‌گیریم. بدین منظور داریم:

$$u(x,t)=u(x,0)+\int_0^t u_{xx}\,dt=f(x)+\int_0^t u_{xx}\,dt. \tag{۱۹}$$

با جای‌گذاری $u=\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ در (۱۹) خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n=f(x)+\int_0^t\Big(\sum_{n=0}^{\infty}u_n\Big)_{xx}\,dt. \tag{۲۰}$$

از این‌رو می‌یابیم:

$$\begin{aligned}u_0(x,t)&=f(x),\\ u_1(x,t)&=\int_0^t(u_0)_{xx}\,dt=t\,f''(x),\\ u_2(x,t)&=\int_0^t(u_1)_{xx}\,dt=\frac{t^2}{2!}f^{(4)}(x),\\ &\vdots\end{aligned} \tag{۲۱}$$

در نتیجه مقدار تقریبی از $u(x,t)$ به‌دست می‌آوریم، که با جای‌گذاری در فرمول (۱۷) و (۱۸)، به‌ترتیب مقادیر تقریبی $u_x(0,t)$ و $u(0,t)$ را می‌یابیم.

مثال ۳.۱. مسئلهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx};\quad 0<x<1, t>0,\\ &u(x,0)=\sin(\pi x);\quad 0<x<1,\\ &u(x_1,t)=e^{-t\pi^2}\sin(\pi x_1),\quad u_x(1,t)=-\pi e^{-t\pi^2};\quad t>0. \end{aligned} \tag{۲۲}$$

در این مسئله ابتدا مقادیر u_0، u_1 و $\cdots$ از فرمول (۲۱) به‌دست آورده و با جای‌گذاری درسری $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$، مقدار تقریبی $u(x,t)$ را به‌دست می‌آوریم و برای تعیین مقادیر $u(x,t)$ در کران $x=0$ از فرمول (۱۸) و برای تعیین مقدار $u_x(x,t)$ در کران $x=0$ از فرمول (۱۷) استفاده می‌کنیم. نتایج برای این مثال به ازای $x_1 = 0/25$ در جدول ۱ آورده شده است و مقادیر $u(x,t)$ به ازای $x_1 = 0/51$ در جدول ۲ آورده شده و خطای مطلق آن با خطای مطلق به‌دست آمده در مرجع [۱۲] به روش تفاضلات متناهی مقایسه شده است، که این مقایسه نشان می‌دهد که نتایج به‌دست آمده از روش تجزیهٔ آدومیان، دارای دقت بیش‌تری است. همچنین مقادیر خطای مطلق $u(x,t)$ به روش تجزیه آدومیان به ازای x و tهای مختلف در جدول ۳ بیان شده است.

جدول۱. خطای مطلق به ازای $x_1 = 0/25$، $n=8$ و tهای مختلف

t	جواب دقیق برای $u(0,t)$	جواب دقیق برای $u_x(0,t)$	خطای مطلق به روش تجزیهٔ آدومیان برای $u(0,t)$	خطای مطلق به روش تجزیهٔ آدومیان برای $u_x(0,t)$
۰/۰۲۵	۰	۲/۴۵۴۶۶	۰	$۸/۸۸۱۷۸\times ۱۰^{-۱۶}$
۰/۲۲۵	۰	۰/۳۴۰۹۸	۰	$۶/۶۶۱۳۴\times ۱۰^{-۱۶}$
۰/۴۲۵	۰	۰/۰۴۷۳۷	$۲/۰۷۸۲\times ۱۰^{-۱۵}$	$۳/۵۱۱۰۸\times ۱۰^{-۱۵}$
۰/۶۲۵	۰	۰/۰۰۶۵۸	$۱/۷۷۳۶۷\times ۱۰^{-۱۵}$	$۱/۷۶۵۵۱\times ۱۰^{-۱۴}$
۰/۸۲۵	۰	۰/۰۰۰۹۱	$۲/۵۹۸۵۵\times ۱۰^{-۱۲}$	$۸/۰۳۶۹۳\times ۱۰^{-۱۲}$
۱/۰۲۵	۰	۰/۰۰۰۱۳	$۱/۵۵۹۹\times ۱۰^{-۸}$	$۴/۹۰۰۷۸\times ۱۰^{-۸}$

جدول ۲. خطای مطلق $u(x,t)$ به ازای $x_1 = 0/51$، $n=8$ و tهای مختلف

t	جواب دقیق $u(x,t)$	خطای مطلق به روش تجزیهٔ آدومیان	خطای مطلق مرجع[۱۲]
۰/۰۰۵	۰/۹۹۹۵۰۷	۰	۰
۰/۰۱	۰/۹۰۵۵۷۱	۰	۰/۰۰۰۰۱۶۰
۰/۰۱۵	۰/۸۲۰۴۶۴	۰	۰/۰۰۰۰۱۵۳
۰/۰۲	۰/۷۴۳۳۵۵	$۱/۱۱۰۲۲\times ۱۰^{-۱۶}$	۰/۰۰۰۰۲۰۰
025/0	۰/۶۷۳۴۹۳	$۱/۱۱۰۲۲\times ۱۰^{-۱۶}$	۰/۰۰۰۰۱۹۱
۰/۰۳	۰/۶۱۰۱۹۷	$۱/۱۱۰۲۲\times ۱۰^{-۱۶}$	۰/۰۰۰۰۱۱۲

جدول ۳. خطای مطلق $u(x,t)$ به ازای x و tهای مختلف و $n=8$

t / x	t=۰/۰۱	t=۰/۰۵	t=۰/۱
	خطای مطلق $u(x,t)$	خطای مطلق $u(x,t)$	خطای مطلق $u(x,t)$
۰/۵	$۲/۵۵\times ۱۰^{-۱۵}$	$۴/۵۶\times ۱۰^{-۹}$	$۲/۲۳\times ۱۰^{-۶}$
۰/۶	$۲/۲۲\times ۱۰^{-۱۵}$	$۴/۳۳\times ۱۰^{-۹}$	$۲/۱۲\times ۱۰^{-۶}$
۰/۷	$۲/۲۲\times ۱۰^{-۱۵}$	$۳/۶۹\times ۱۰^{-۹}$	$۱/۸۰\times ۱۰^{-۶}$
۰/۸	$۱/۴۴\times ۱۰^{-۱۵}$	$۲/۶۸\times ۱۰^{-۹}$	$۱/۳۱۲\times ۱۰^{-۶}$
۰/۹	$۷/۷۷\times ۱۰^{-۱۶}$	$۱/۴۱\times ۱۰^{-۹}$	$۶/۸۸\times ۱۰^{-۶}$

مثال۳. ۲. مسئلهٔ

$$u_t = u_{xx}; \quad 0 < x_1 < x < 1, \ \ t > 0,$$
$$u(x,0) = \cos x; \ \ 0 < x_1 < x < 1, \qquad (۲۳)$$
$$u(x_1,t) = e^{-t}\cos x_1, \ \ u_x(1,t) = -e^{-t}\sin 1; \quad t > 0.$$

مفروض است. در این مثال، مقادیر $u(x,t)$ و $u_x(x,t)$ در کران $x=0$ به ازای $t=0/255$ و x_1 های مختلف به‌دست می‌آوریم. نتایج به‌دست آمده نشان‌دهندهٔ این است که هر چه x_1 به صفر نزدیک‌تر باشد، جواب به‌دست آمده به جواب دقیق نزدیک‌تر است. این نتایج در جدول ٤ آورده شده است.

جدول ۴. مقادیر تقریبی $u(0,t)$ و $u_x(0,t)$ به ازای x_1 های مختلف

جواب دقیق $u(0,t)$	جواب تقریبی $u(0,t)$	جواب دقیق $u_x(0,t)$	جواب تقریبی $u_x(0,t)$	x_1
۰/۷۹۸۵۱٦	۰/۷۹۸۵۱٦	۰	$۲/۶۳\times ۱۰^{-۱۴}$	۰/۳
۰/۷۹۸۵۱٦	۰/۷۹۸۵۱٦	۰	$۲/۲۱\times ۱۰^{-۱۴}$	۰/۲۵
۰/۷۹۸۵۱٦	۰/۷۹۸۵۱٦	۰	$۱/۷۷\times ۱۰^{-۱۴}$	۰/۲
۰/۷۹۸۵۱٦	۰/۷۹۸۵۱٦	۰	$۱/۳۳\times ۱۰^{-۱۴}$	۰/۱۵
۰/۷۹۸۵۱٦	۰/۷۹۸۵۱٦	۰	$۸/۸۸\times ۱۰^{-۱۴}$	۰/۱

مسائل معکوس سهموی با تابع کنترل مجهول

در این بخش، مسئلهٔ هدایت گرمایی معکوس

$$u_t = u_{xx} + a(t)u; \ (x,t) \in D,$$
$$u(x,0) = f(x); \quad x \ge 0, \qquad (۲٤)$$
$$u(0,t) = h(t); \ \ h(t) \ne 0, 0 \le t \le T,$$

را بررسی می‌کنیم که در آن $D = \{(x,t), x>0, 0<t<T\}$ و $T>0$ عدد ثابت و f و h توابع هموار روی دامنه‌هایشان است. توابع $a(t)$ و $u(x,t)$ در این مسئله مجهول هستند. بنا بر این نیاز به شرط فوق اضافی

$$-u_x(0,t) = g(t); \ \ 0 \le t \le T, \qquad (۲۵)$$

داریم. با استفاده از تبدیل

$$v(x,t) = r(t)u(x,t); \ \ r(t) = e^{-\int_0^t a(s)ds}, \qquad (۲٦)$$

مسئله (٢٤) به‌صورت:

$$v_t = v_{xx}; \ (x,t) \in D,$$
$$v(x,0) = f(x); \quad x \ge 0, \qquad (۲۷)$$
$$v(0,t) = p(t); \quad 0 \le t \le T,$$

و شرط فوق اضافی به شکل:

$$-v_x(0,t) = q(t); \ \ 0 \le t \le T, \qquad (۲۸)$$

حاصل می‌شوند که در آن‌ها داریم $p(t) = r(t)h(t)$, $q(t) = r(t)g(t)$.

مسئلهٔ (۲۷) و (۲۸) دارای جواب به‌صورت [۱۳]:

$$v(x,t)=2\int_0^t K(x,t-s)q(s)ds+\int_0^\infty N(x,\tau,t)f(\tau)d\tau, \tag{۲۹}$$

است که در آن $K(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$ جواب اساسی از معادلهٔ گرما است و

$$N(x,\tau,t)=K(x-\tau,t)+K(x+\tau,t).$$

حال از (۲۶) تا (۲۹) به‌دست می‌آوریم:

$$u(x,t)=2\int_0^t K(x,t-s)e^{\gamma(t)-\gamma(s)}\tau(s)ds+\int_0^\infty N(x,\tau,t)e^{\gamma(t)}f(\tau)d\tau,$$

که در آن داریم $\gamma(t)=\int_0^t a(s)\,ds$.

اگر از شرط فوق اضافی (۲۵) استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$u(0,t)=2\int_0^t K(0,t-s)e^{\gamma(t)-\gamma(s)}\tau(s)ds+\int_0^\infty N(0,\tau,t)e^{\gamma(t)}f(\tau)d\tau=h(t),$$

و

$$h(t)=2\int_0^t \frac{e^{\gamma(t)-\gamma(s)}}{\sqrt{4\pi(t-s)}}\tau(s)ds+\int_0^\infty N(0,\tau,t)e^{\gamma(t)}f(\tau)d\tau,$$

یا

$$\sqrt{\pi}\,p(t)e^{-\gamma(t)}=\int_0^t \frac{p(-\gamma(s))}{\sqrt{t-s}}\tau(s)ds\times\int_0^\infty N(0,\tau,t)f(\tau)d\tau.$$

بنا بر این معادلهٔ انتگرال ولترا نوع دوم زیر به‌دست می‌آید:

$$\phi(t)=\varphi(t)+\int_0^t H(t,s,\phi(t))ds\,,$$

که در آن داریم $H(t,s,\phi)=\frac{\tau(s)\,\phi(s)}{\sqrt{\pi}\,h(t)\sqrt{t-s}}$، $\varphi(t)=\int_0^\infty \frac{N(0,\tau,t)\,f(\tau)}{\sqrt{\pi}\,h(t)}d\tau$ و $\phi(t)=e^{-\gamma(t)}$.

قضیه ۱.۳. (وجود و یکتایی): برای هر تابع تکه‌ای پیوسته $\varphi(t)$، معادلهٔ انتگرال

$$\phi(t)=\varphi(t)+\int_0^t H(t,s,\phi(t))ds\,,$$

دارای جواب یکتای پیوسته است [۱۳].

برای حل مسئلهٔ (۲۴) به روش تجزیهٔ آدومیان، نخست مسئلهٔ (۲۷) را به‌روش مذکور حل کرده و $v(x,t)$ را می‌یابیم. سپس با استفاده از شرط فوق اضافی (۲۸)، $r(t)$ را محاسبه می‌کنیم و $a(t)$ را با استفاده از

$$a(t)=-\frac{r'(t)}{r(t)}, \tag{۳۰}$$

محاسبه کرده و با جای‌گذاری در (۲۶)، $u(x,t)$ را به‌دست می‌آوریم.

مثال ٤. ۱. مسئلهٔ

$$\begin{aligned} &u_t=u_{xx}+a(t)u;\ x>0,\ \ 0<t<1,\\ &u(x,0)=\cos x-\sin x;\ \ x\ge 0,\end{aligned} \tag{۳۱}$$

$$u(0,t)=e^{-(t^2/2)-t}; \quad 0\le t\le 1,$$

با شرط فوق اضافی

$$u_x(0,t)=e^{-(t^2/2)-t};\ 0\le t\le 1,$$

مفروض است. نخست با استفاده از فرمول (۲۶)، مسئلهٔ (۳۱) به مسئلهٔ

$$\begin{aligned}&v_t=v_{xx};\ x>0,0<t<1,\\&v(x,0)=\cos x-\sin x;\quad x\ge 0,\\&v(0,t)=r(t)e^{-(t^2/2)-t},\quad v_x(0,t)=-r(t)e^{-(t^2/2)-t};\ 0\le t\le 1,\end{aligned} \tag{۳۲}$$

تبدیل می‌شود و با حل این مسئله، مقدار تقریبی $v(x,t)$ را یافته، سپس به کمک $v(0,t)$ یا $v_x(0,t)$، مقدار $a(t)$ را محاسبه می‌کنیم. برای تعیین مقدار $a(t)$ و $u(x,t)$ به‌ترتیب از فرمول‌های (۳۰) و (۲۶) استفاده می‌کنیم. نتایج عددی برای $a(t)$ و $u(x,t)$ در جدول ۵ و ٦ به ازای $n=5$ آورده شده است.

جدول ۵. مقادیر تقریبی $u(x,t)$ و $a(t)$ به ازای $x=0/25$ و $n=5$

t	جواب عددی $u(x,t)$	جواب عددی $a(t)$	جواب دقیق $u(x,t)$	جواب دقیق $a(t)$
۰/۰۵	۰/۶۸۵۴۶۳	-۰/۰۵	۰/۶۸۵۴۶۳	-۰/۰۵
۰/۱	۰/۶۴۹۵۹۲	-۰/۹۹۹۹۹۹	۰/۶۴۹۵۹۲	-۰/۱
۰/۱۵	۰/۶۱۴۰۶۱	-۰/۱۴۹۰۰۰۷	۰/۶۱۴۰۶۱	-۰/۱۵
۰/۲	۰/۵۷۹۰۲۴	-۰/۱۹۹۹۹۹۷	۰/۵۷۹۰۲۴	-۰/۲

جدول ۶. خطای مطلق $u(x,t)$ به ازای $n=5$ و x و tهای مختلف

t	t=۰/۱	t=۰/۲	t=۰/۳	t=۰/۴
x	خطای مطلق $u(x,t)$	خطای مطلق $u(x,t)$	خطای مطلق $u(x,t)$	خطای مطلق $u(x,t)$
۰/۲	۰	$۱/۱۱\times۱۰^{-۱۶}$	$۱/۱۱\times۱۰^{-۱۶}$	$۳/۳۳\times۱۰^{-۱۶}$
۰/٤	$۱/۱۱\times۱۰^{-۱۶}$	$۵/۵۵\times۱۰^{-۱۷}$	$۵/۵۵\times۱۰^{-۱۷}$	$۱/۶۷\times۱۰^{-۱۶}$
۰/۶	۰	$۲/۷۸\times۱۰^{-۱۷}$	$۲/۷۸\times۱۰^{-۱۷}$	$۲/۷۸\times۱۰^{-۱۷}$
۰/۸	$۹/۳۷\times۱۰^{-۱۷}$	$۹/۰۲\times۱۰^{-۱۷}$	$۸/۶۷\times۱۰^{-۱۷}$	$۸/۶۷\times۱۰^{-۱۸}$

مسئلهٔ هدایت گرمایی معکوس غیرهمگن با تابع کنترلی مجهول

معادلهٔ

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+p(t)u(x,t)+q(x,t);\ 0\le x\le l,0\le t\le T_0, \tag{۳۳}$$

با شرط اولیهٔ

$$u(x,0)=f(x);\ 0\le x\le l, \tag{۳۴}$$

و شرایط کرانه‌ای

$$u(0,t)=g_0(t),u(l,t)=g_1(t);\ 0\le t\le T_0, \tag{۳۵}$$

و نیز با شرط فوق اضافی

$$u(x_1,t)=k(t);\ 0<x_1<1, 0<t<T_0, \tag{۳۶}$$

مفروض است که در آن f، g_0، g_1، q و k توابع معلوم، اعداد l، T_0 و x_1 اعداد مثبت مشخص و توابع $u(x,t)$ و $p(t)$ مجهول است.

این نوع معادلات برای نمونه در مطالعه‌ای از فرایند هدایت گرمایی، قضیه کنترل و نفوذ شیمیایی کاربردهای زیادی دارد [۱۴]، [۱۵].

معادلهٔ (۳۳) برای شرح یک فرایند تبدیل گرما با یک پارامتر منبعی استفاده می‌شود و معادلهٔ (۳۶) درجه حرارت در نقطهٔ x_1 در زمان t را نمایش می‌دهد. بنا بر این هدف از حل این مسئلهٔ معکوس، تعیین پارامتر کنترل که در هر زمان t، در نقطه x_1 تولید می‌شود. وجود و یکتایی از جواب این مسئله در مراجع [۱۵]-[۱۸] به اثبات رسیده است.

با استفاده از تبدیل معکوس‌پذیر

$$v(x,t)=r(t)u(x,t);\ r(t)=e^{-\int_0^t p(s)\,ds}, \tag{۳۷}$$

معادله (۳۳) تا (۳۶) به‌صورت

$$\begin{aligned}
&v_t=v_{xx}+r(t)q(x,t);\ 0\le x\le l, 0\le t\le T_0,\\
&v(x,0)=f(x);\quad 0\le x\le l,\\
&v(0,t)=r(t)g_0(t),\ v(l,t)=r(t)g_1(t);\ 0\le t\le T_0,\\
&v(x_1,t)=r(t)k(t);\ 0\le t\le T_0,
\end{aligned} \tag{۳۸}$$

تبدیل می‌شود که در آن داریم:

$$r(t)=\frac{v(x_1,t)}{k(t)};\ 0<t\le T_0, \tag{۳۹}$$

و

$$p(t)=-\frac{r'(t)}{r(t)};\ 0<t\le T_0. \tag{۴۰}$$

برای حل مسئلهٔ (۳۸) به‌روش تجزیهٔ آدومیان، از دو طرف معادلهٔ مربوط به مسئلهٔ (۳۸) نسبت به t انتگرال می‌گیریم، بدین منظور می‌یابیم :

$$v(x,t)=v(x,0)+\int_0^t v_{xx}\,dt+\int_0^t r(t)q(x,t)\,dt=f(x)+\int_0^t v_{xx}\,dt+\int_0^t r(t)q(x,t)\,dt.$$

با جای‌گذاری $v=\sum_{n=0}^{\infty}v_n$ و $r=\sum_{n=0}^{\infty}r_n$ در رابطهٔ اخیر به‌دست می‌آوریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}v_n=f(x)+\int_0^t(\sum_{n=0}^{\infty}v_n)_{xx}\,dt+\int_0^t(\sum_{n=0}^{\infty}r_n)q(x,t)\,dt,$$

که در آن به ازای $n=0,1,2,\cdots$ داریم $r_n(t)=\frac{v_n(x,t)}{k(t)}$. در نتیجه مؤلفه‌های $v(x,t)$ بدین‌صورت محاسبه می‌شود:

$$v_0(x,t)=f(x),\quad r_0(t)=\frac{v_0(x_1,t)}{k(t)},$$
$$v_1(x,t)=\int_0^t (v_0)_{xx}\,dt+\int_0^t r_0(t)q(x,t)dt,\ \ r_1(t)=\frac{v_1(x_1,t)}{k(t)},\qquad \ldots$$

با جای‌گذاری مقادیر $v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}v_n(x,t)$ و $r(t)=\sum_{n=0}^{\infty}r_n(t)$ در فرمول‌های (۴۰) و (۳۷)، به‌ترتیب $p(t)$ و $u(x,t)$ را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۱.۵. در این مثال مسئلهٔ

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+p(t)u(x,t)+(\pi^2-(1+t)^2)e^{-t^2}(\cos(\pi x)+\sin(\pi x));\ 0<x<l,\ t>0, \quad (۴۱)$$
$$u(x,0)=\cos(\pi x)+\sin(\pi x);\ 0\le x\le l,$$
$$u(0,t)=e^{-t^2},\quad u(l,t)=-e^{-t^2};\ \ t\ge 0.$$

با شرط فوق اضافی

$$u(x_1,t)=e^{-t^2}(\cos(\pi x_1)+\sin(\pi x_1));\ \ t\ge 0, \qquad (۴۲)$$

بررسی می‌شود. مقادیر تقریبی $u(x,t)$ به ازای $x_1=0/25$ و $t=1$ و xهای مختلف به‌دست می‌آوریم و خطای مطلق از روش تجزیهٔ آدومیان با روش‌های کرانک- نیکلسون و کراندل[۱] ضمنی در مرجع [۱۹] و روش تفاضلات متناهی از مرجع [۲۰] در جدول ۷ مقایسه می‌شود و همچنین مقادیر $p(t)$ به ازای $x_1=0/25$ و tهای مختلف به‌دست می‌آوریم و خطای مطلق از روش تجزیه آدومیان با دو روش کرانک- نیکلسون و روش کراندل ضمنی در مرجع [۱۹] و روش تفاضلات متناهی از مرجع [۲۰] در جدول ۸ مقایسه می‌شود. جواب واقعی این مسئله عبارت است از $p(t)=1+t^2$ و $u(x,t)=e^{-t^2}(\cos(\pi x)+\sin(\pi x))$

جدول ۷. خطای مطلق $u(x,t)$ به ازای $x_1=0/25$، $t=1$ و $n=11$

x	تجزیه آدومیان	کرانک - نیکلسون [۱۹]	کراندل [۱۹]	مرجع [۲۰]
۰/۰۵	$۲/۸۴۹\times۱۰^{-۹}$	$۷/۰\times۱۰^{-۳}$	$۶/۰\times۱۰^{-۶}$	$۷/۴\times۱۰^{-۹}$
۰/۱۵	$۳/۳۴۹\times۱۰^{-۹}$	$۷/۱\times۱۰^{-۳}$	$۶/۳\times۱۰^{-۶}$	$۸/۶\times۱۰^{-۹}$
۰/۲۵	$۳/۵۲۲\times۱۰^{-۹}$	$۷/۰\times۱۰^{-۳}$	$۶/۵\times۱۰^{-۶}$	$۹/۲\times۱۰^{-۹}$
۰/۳۵	$۳/۳۴۹\times۱۰^{-۹}$	$۷/۴\times۱۰^{-۳}$	$۶/۶\times۱۰^{-۶}$	$۹/۴\times۱۰^{-۹}$
۰/۴۵	$۲/۸۴۹\times۱۰^{-۹}$	$۷/۵\times۱۰^{-۳}$	$۶/۸\times۱۰^{-۶}$	$۷/۳\times۱۰^{-۹}$
۰/۵۵	$۲/۰۷۰\times۱۰^{-۹}$	$۷/۳\times۱۰^{-۳}$	$۶/۸\times۱۰^{-۶}$	$۵/۲\times۱۰^{-۹}$
۰/۶۵	$۱/۰۸۸\times۱۰^{-۹}$	$۷/۵\times۱۰^{-۳}$	$۷/۰\times۱۰^{-۶}$	$۳/۳\times۱۰^{-۹}$

جدول ۸. خطای مطلق $p(t)$ به ازای $x_1=0/25$ و tهای مختلف و $n=11$

t	تجزیه آدومیان	کرانک - نیکلسون [۱۹]	کراندل [۱۹]	مرجع [۲۰]
۰/۰۵	$۲/۶۶۵\times۱۰^{-۱۵}$	$۴/۹\times۱۰^{-۳}$	$۶/۶\times۱۰^{-۵}$	$۷/۱\times۱۰^{-۹}$
۰/۱	$۳/۷۷۶۵\times۱۰^{-۱۵}$	$۴/۹\times۱۰^{-۳}$	$۶/۸\times۱۰^{-۵}$	$۶/۳\times۱۰^{-۹}$
۰/۱۵	$۴/۸۸۵\times۱۰^{-۱۵}$	$۴/۷\times۱۰^{-۳}$	$۶/۸\times۱۰^{-۵}$	$۹/۱\times۱۰^{-۹}$
۰/۲	$۵/۹۹۵\times۱۰^{-۱۵}$	$۴/۷\times۱۰^{-۳}$	$۶/۷\times۱۰^{-۵}$	$۱/۱\times۱۰^{-۹}$
۰/۲۵	$۷/۳۲۵\times۱۰^{-۱۵}$	$۴/۸\times۱۰^{-۳}$	$۶/۸\times۱۰^{-۵}$	$۱/۶\times۱۰^{-۹}$
۰/۳	$۹/۵۴۸\times۱۰^{-۱۵}$	$۴/۸\times۱۰^{-۳}$	$۶/۶\times۱۰^{-۵}$	$۳/۲\times۱۰^{-۹}$
۰/۳۵	$۱/۲۴۳\times۱۰^{-۱۵}$	$۴/۶\times۱۰^{-۳}$	$۶/۵\times۱۰^{-۵}$	$۸/۱\times۱۰^{-۹}$

۱. Crandall

نتیجه‌گیری

در این مقاله سه نوع مسئلهٔ سهموی معکوس بررسی شد. در این مسائل معکوس یکی از شرایط کرانه‌ای، ضرایب در معادله یا تابع کنترل مجهول بود که برای تعیین آن، مجهول یک شرط فوق اضافی در نظر گرفته شد. برای حل عددی این مسائل، از روش تجزیهٔ آدومیان استفاده کردیم. مقایسهٔ نتایج عددی ارائه شده با جواب دقیق و روش‌های عددی موجود، نشان‌دهندهٔ دقت مطلوب روش تجزیهٔ آدومیان برای حل این‌گونه مسائل است.

منابع

1. W. E. Boyce, "Elementary differential equations and boundary value problems", John Wiley and sons, New York (1997).

2. L. Debnath, "Nonlinear partial differential equations for scientists and engineers", Burgbausen, Berlin (1998).

3. A. M. Wazwaz, "A reliable modification of Adomian decomposition method", Apple. Math. Comput, 102 (1999) 77-86.

4. M. Inc, "On numerical solutions of partial differential equations by Adomian decomposition Method", Journal of mathematical (2004)153-164.

۵. L. yang, Zui-cha. Deng, "An inverse problem of identifying the coefficient of parabolic equation",Applied Mathematical Modeling, 32 (2008) 1984-1995.

6. Z. M. Gharsseldien, K. Hemida, "New technique to avoid ‘‘noise terms” on the solutions of inhomogeneous differential equations by using Adomian decomposition method", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 14 (2009) 685-696.

7. W. Chen, Z. Lu, "An algorithm for Adomian decomposition method", Applied Mathematics and Computation 159 (2004) 221-235.

8. D. Kaya, M. Inc, "On the Solution of the Nonlinear Wave Equation by the Decomposition Method, Bull. Malaysian Math. Soc. (Second Series) 22 (1999) 151-155.

9. A. Soufyane, M. Boulmalf, "Solution of linear and nonlinear parabolic equations by the decomposition method", Applied Mathematics and Computation 162 (2005) 687-693.

10. J. V. Beck, C. R. Blackwell, C. R. Clair, "Inverse heat conduction: Ill-posed Problems", Wiley New York (1985).

11. A. N. Tikhonov, V. Y. Arsenin, "Solutions of Ill-Posed Problems", V. H.Winston and Sons, (1997).

12. Q .Wu, A. Sheng, "A note on finite difference method to analysis an ill-posed problem", Appl. Math. and Comp.182 (2006) 1040-1047

13. J. R. Cannon, "The One-Dimensional Heat Equation", Addison Wesley, Reading, MA, (1984).

14. J. R. Cannon, H. M. Yin, "On a class of nonlinear parabolic equations with Nonlinear trace type Functional inverse problems", 7 (1991) 149-161.

15. J. R. Cannon, Y.Lin, "Numerical solutions of some parabolic inverse problems", Numer, Math. Partial Diff. Eqns., 2 (1990) 177-191.

16. J. R. Cannon, Y.Lin, S. Wang, "Determination of source parameter in parabolic equations", Meccanica, 27 (1992) 85-94.

17. J. R. Cannon, Y. Lin, "An inverse problem of finding a parameter in a semilinear heat equation", J. Math. Anal. Appl, 145 (1995) 470-484.

18. S. Wang, Y. Lin, "A finite difference solution to an inverse problem determining a Control function in a parabolic partial differential equation", Inverse Problems (1989) 631-640.

19. M. Dehghan, "A Tau method for the one dimensional parabolic inverse problem subject To temperature overspecification", Computer and Mathematics with application, 52 (2006) 933-940.

20. M. Dehghan, "Numerical solution of one dimensional parabolic inverse", Appl. Math. and Comp.136 (2003) 333-344.