نشریه علوم دانشگاه تربیت معلم — جلد ۳، شماره ۳، پاییز ۱۳۸۲

Downloaded from jsci.khu.ac.ir at 2:30 IRST on Tuesday November 13th 2018

# گروه خودریختی‌های یک (۱۱۵,۱۹,۳)-۲ طرح متقارن

عبدالرضا اسکویی: دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی
غلامرضا صفا کیش‌همدانی: دانشگاه بوعلی‌سینا همدان
محمدجواد اسلامپور: دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

## چکیده

در این مقاله گروه خودریختی طرح‌های متقارن با $\lambda=$ ۳ بررسی شده است، و درحالت خاص، یک (۱۱۵,۱۹,۳)-۲ طرح متقارن که وجود یا عدم آن معلوم نیست درنظر گرفته و ثابت شده است که اگر $f$ یک خودریختی از این طرح باشد، آن گاه $o(f)=2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}19^{\sigma}$. همچنین درباره نقاط ثابت این خودریختی‌ها نتایجی به دست آمده است.

## ۱- مقدمه

فرض کنید $X$ یک $v$- مجموعه و $P_i(X)$ مجموعه $i$- زیر مجموعه‌های $X$ باشند. دوتایی $D=(X,\mathbf{B})$ که در آن $\mathbf{B}$ گردایه‌ای از عناصر $P_k(X)$ (معمولاً *بلوک* نامیده می‌شوند) است، یک $(v,k,\lambda)$-۲ *طرح بلوکی* (یا به طور خلاصه *طرح*) می‌نامیم. هرگاه هر عضو از $P_2(X)$، $\lambda$ بار در بلوک‌های $\mathbf{B}$ ظاهر شود، اگر $|\mathbf{B}|=v$ آن گاه طرح را *متقارن* می‌گوییم. در هر طرح متقارن، دفعات ظهور هر عنصر $X$ دربلوک‌های $\mathbf{B}$، برابر با $k$ است.

**مثال:** قراردهید $X=\{۱،۲،۳،...،۷\}$ و

$$\begin{aligned}\mathbf{B}:\quad & B_1=\{1,2,3\} \quad B_4=\{2,4,6\} \quad B_6=\{3,4,7\}\\ & B_2=\{1,4,5\} \quad B_5=\{2,5,7\} \quad B_7=\{3,5,6\}\\ & B_3=\{1,6,7\}\end{aligned}$$

ملاحظه می‌شود $D=(X,\mathbf{B})$، یک (۷,۳,۱)-۲ طرح متقارن است.

نگاشت $\psi$ بین دو طرح $D=(X,\mathbf{B})$ و $D'=(X',\mathbf{B}')$ یک *یک‌ریختی* نامیده می‌شود، هرگاه $\psi: X\to X'$ یک تناظر یک به یک باشد به طوری که $\psi(\mathbf{B})=\mathbf{B}'$.

هر یک‌ریختی از یک طرح $D$ به توی خودش را یک *خودریختی* می‌نامیم. مجموعه کلیه خودریختی‌های طرح $D$ همراه با عمل ترکیب توابع یک گروه تشکیل می‌دهد که به آن گروه خودریختی‌های طرح می‌گویند

و با $\mathrm{Aut}(D)$ نمایش داده می‌شود. گروه خودریختی‌های یک طرح، راهی برای یافتن طرح است که محققان زیادی از این طریق طرح‌هایی که قبلاً وجود یا عدم آن‌ها معلوم نبوده یافته‌اند.

فرض کنید $D=(X,\mathbf{B})$ و $f\in \mathrm{Aut}(D)$ تعریف می‌کنیم:

$$fix(f)=\{x\in X: f(x)=x\},$$

$$x \text{ مدار } =(x)=\{f(x): f\in \mathrm{Aut}(D)\}.$$

به سادگی می‌توان مشاهده کرد که مدارها $X$ را افراز می‌کنند.

اگر $D$ یک $(v,k,\lambda)$-۲ طرح متقارن باشد، آن گاه $\alpha\in \mathrm{Aut}(D)$ یک خودریختی روی بلوک‌ها القا می‌کند که با $\alpha_{\mathbf{B}}$ نمایش می‌دهیم. اگر $D$ یک $(v,k,\lambda)$-۲ طرح متقارن باشد، آن گاه ارتباط نزدیکی بین $\alpha$ و $\alpha_{\mathbf{B}}$ وجود دارد.

**مثال:** $\alpha=(۴۵)(۲۶)$ یک خودریختی طرح داده شده در مثال قبل است. با اعمال $\alpha$ روی بلوک‌ها داریم:

$$\alpha_{\mathbf{B}}=(B_4B_5)(B_6B_7).$$

قضیه زیر موسوم به لم *کشی-فروبنیوس* است.

**قضیه:** اگر $G$ گروه جایگشتی روی $X$ و $r$ تعداد مدارهای آن روی $X$ باشد، آن گاه

$$r=\frac{1}{|G|}\sum_{\alpha\in G}|fix(\alpha)|.$$

لم زیر تعداد بلوک‌های یک $(v,k,\lambda)$-۲ طرح را بر حسب $k$ ،$\lambda$ و $v$ به دست می‌دهد.

**لم۱ [۴] :** در یک $(v,k,\lambda)$-۲ طرح $D=(X,\mathbf{B})$ داریم

$$b=|\mathbf{B}|=\lambda\frac{\binom{v}{2}}{\binom{k}{2}}.$$

لم‌های۲و۳ ارتباط بین $\alpha$ و $\alpha_{\mathbf{B}}$ را که $\alpha$ خودریختی یک طرح متقارن است بیان می‌کنند.

**لم۲ [۴] :** فرض کنید $D$ یک طرح متقارن و $\alpha\in \mathrm{Aut}(D)$. در این صورت

$$|fix(\alpha)|=|fix(\alpha_{\mathbf{B}})|.$$

**لم۳ [۴] :** اگر $D$ یک طرح متقارن و $G\le \mathrm{Aut}(D)$، آن گاه تعداد مدارهای ساخته شده توسط $G$ روی نقاط و بلوک‌ها با هم مساوی‌اند.

لم زیر کران بالایی برای تعداد نقاط ثابت یک خودریختی طرح متقارن ارائه می‌کند که نقش اساسی در ادامه مقاله ایفا می‌کند.

**لم٤ [۲] :** فرض کنید $D$ یک $(v,k,\lambda)$-۲ طرح متقارن و $\alpha\in \mathrm{Aut}(D)$ غیر همانی باشد. اگر $f=|fix(\alpha)|$،



Downloaded from jsci.khu.ac.ir at 2:30 IRST on Tuesday November 13th 2018

آن گاه

$$f \le \begin{cases} \frac{1}{4}(v+3k-6) & o(\alpha)\ge 3, \\ \frac{1}{3}(v+2k-4) & o(\alpha)=2. \end{cases}$$

لم زیر خاصیت مهمی را درمورد طرح‌های متقارن در رابطه با اشتراک بلوک‌ها بیان می‌کند.

**لم۵ [۴] :** هر دو بلوک یک $(v,k,\lambda)$-۲ طرح متقارن در $\lambda$ نقطه مشترکند.

## ۲- نتایجی درباره گروه خودریختی طرح‌های متقارن

در این بخش بعضی از نتایج خودریختی‌هایی از مرتبه عدد اول p یک طرح متقارن را ارائه می‌کنیم. سپس در باره طرح‌های متقارن با λ=۳ نتایجی را بیان می‌کنیم.

در سرتاسر این بخش منظور از $D$ یک $(v,k,\lambda)$-۲ طرح متقارن $D=(X,\mathbf{B})$ است.

**لم۶:** فرض کنید $\alpha\in \mathrm{Aut}(D)$ و $o(\alpha)=p$ یک عدد اول باشد در این صورت

الف) اگر $B_1,B_2\in fix(\alpha_B)$ و $\lambda<p$ و $x\in B_1\cap B_2$ آن گاه $x\in fix(\alpha)$

ب) اگر $x,y\in fix(\alpha)$ و $\lambda<p$ آن گاه کلیه بلوک‌های شامل $x,y$، بلوک ثابت هستند.

ج) اگر $p>\lambda-1>1$، آن گاه برای هر بلوک $B$، $B\not\subset fix(\alpha)$.

**اثبات:**

الف) اگر $x\notin fix(\alpha)$، آن گاه $orbit(x)\subseteq B_1\cap B_2$ و بنا بر این $|B_1\cap B_2|\ge p>\lambda$ و این تناقض با لم ۵ است.

ب) چون $x,y\in fix(\alpha)$، بنا بر این اگر $x,y\in B$، آن گاه $x,y\in\alpha_B$. اگر $\alpha(B)\neq B$، آن گاه مدار $B$ تحت $\alpha$ شامل حداقل $p$ بلوک است و هر کدام نیز شامل $x,y$ هستند. پس $x,y$ حداقل در $p$ بلوک ظاهر می‌شوند که این متناقض با $\lambda<p$ است.

ج) فرض کنید $B\subseteq fix(\alpha)$. اگر $B'$ یک بلوک $D$ باشد، آن گاه $|B\cap B'|=\lambda>2$. پس $B'$ شامل حداقل دو نقطه ثابت است. بنا بر قسمت (ب) $B'$ بلوک ثابت است. پس هر بلوک این طرح تحت $\alpha$ ثابت باقی می‌ماند. در نتیجه $\alpha$ خودریختی همانی است که خلاف فرض است.

**لم۷:** فرض کنید $D$ یک $(v,k,3)$-۲ طرح متقارن و $\alpha\in\mathrm{Aut}(D)$ از مرتبه عدد اول $p\ge 5$ باشد. اگر بلوک ثابت $B_0$ شامل $m$ نقطه ثابت باشد، آن گاه

$$|fix(\alpha)|=\frac{2}{3}\binom{m}{2}+1.$$



Downloaded from jsci.khu.ac.ir at 2:30 IRST on Tuesday November 13th 2018

Downloaded from jsci.khu.ac.ir at 2:30 IRST on Tuesday November 13th 2018

**اثبات:** فرض کنید $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ، نقاط ثابت $B_0$ باشند. هر بلوک دیگر شامل یک زوج از $x_i$ ها بلوک ثابت است ( بنا بر لم۶ب). برای هر بلوک ثابت $B_l$ ، داریم $|B_l \cap B_0| = 3$ (بنا بر لم۵ ) و $B_l \cap B_0 \subseteq \{x_1, \ldots, x_m\}$ حال مجموعه زیر را در نظر بگیرید.

$$S = \{(\{x_i, x_j\}, B) \mid x_i, x_j \in \{x_1, \ldots, x_m\},\ x_i, x_j \in B,\ B \neq B_0\}.$$

$|S|$ را به دو صورت می‌شماریم. هر بلوک ثابت شامل سه عضو از مجموعه $\{x_1, \ldots, x_m\}$ است تعداد بلوک‌های ثابت به غیر از $B_0$ برابر $|fix(\alpha)| - 1$ است. پس $|S| = 3(|fix(\alpha)| - 1)$. از طرف دیگر هر زوج از عناصر مجموعه $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ به غیراز $B_0$ در دو بلوک ثابت دیگر ظاهر می‌شود. پس $|S| = \binom{m}{2} \times 2$ و در نتیجه $|fix(\alpha)| = \frac{2}{3}\binom{m}{2} + 1$.

**لم۸:** با مفروضات لم۷، تعداد نقاط ثابت کلیه بلوک‌های ثابت $D$ ، برابر با $m$ است.

**اثبات:** فرض کنید $B_1$ و $B_2$ دو بلوک ثابت با تعداد نقاط ثابت $m$ و $m'$ باشند. در این‌صورت

$$|fix(\alpha)| = \frac{2}{3}\binom{m}{2} + 1 = \frac{2}{3}\binom{m'}{2} + 1$$

در نتیجه $m = m'$.

**نتیجه۱:** با مفروضات لم۷ ، یک $(|fix(\alpha)|, m, 3)$-۲ طرح متقارن درون طرح $D$ وجود دارد.

**اثبات:** قرار دهید $\mathbf{B}' = \{B \cap fix(\alpha) \mid B \in fix(\alpha_{\mathbf{B}})\}$. با توجه به روند اثبات لم۸، $\mathbf{B}'$ گردایه‌ای از مجموعه‌های $m$-عضوی است. با توجه به لم۸، $\mathbf{B}'$ مجموعه بلوک‌های یک $(|fix(\alpha)|, m, 3)$-۲ طرح متقارن است.

**لم۹:** با مفروضات لم۷، اگر $o(\alpha)$ مساوی 2 و یا 3 باشد، آن گاه

$$|fix(\alpha)| \leq \frac{2}{3}\binom{m}{2} + 1.$$

**اثبات:** چون در این حالت ممکن است اشتراک دو بلوک ثابت، مجموعه نقاط ثابت نباشند، بنا بر این در روند اثبات لم۷، تعداد بلوک‌های ثابت شامل یک زوج از عناصر $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ ، حداکثر $|fix(\alpha)| - 1$ است. از اینجا مطلوب حاصل می‌شود.

**لم۱۰:** با مفروضات لم۷، $|fix(\alpha)| + |fix(\alpha)|(k - m) \leq v$.

**اثبات:** چون اشتراک هر دو بلوک ثابت زیرمجموعه‌ای از نقاط ثابت است، پس هر بلوک ثابت دارای $k - m$ نقطه است که در هیچ کدام از بلوک‌های ثابت دیگر ظاهر نمی‌شود. حال شمارش نقاط در بلوک‌های ثابت به نتیجه مطلوب خواهیم رسید.

Downloaded from jsci.khu.ac.ir at 2:30 IRST on Tuesday November 13th 2018

لم‌های۷ و ۹، نقش اساسی در بررسی خودریختی‌های از مرتبه عدد اول $p$ یک $(v,k,\lambda)$-۲ طرح متقارن بازی می‌کند و در بخش سوم خواهیم دید که نتایج لم۷ و ۹ نتایج قوی‌تری نسبت به لم٤ را به دست می‌دهد.

## ۳- گروه خودریختی یک (۱۱۵،۱۹،۳)-۲ طرح متقارن

دراین بخش به بررسی گروه خودریختی یک (۱۱۵،۱۹،۳)-۲ طرح متقارن می‌پردازیم. وجود یا عدم این طرح هنوز مشخص نشده است[۳]. همان‌طور که در بخش۱ مطرح کردیم، گروه خودریختی طرح‌ها راهی برای یافتن طرح است. در این بخش، $D$ را یک(۱۱۵،۱۹،۳)-۲ طرح متقارن گرفته و خودریختی‌های از مرتبه عدد اول $p$ آن‌ها را بررسی می‌کنیم. فرض کنیم $\alpha \in \mathrm{Aut}(D)$ و $o(\alpha)=p$ عددی اول باشد. بر اساس قضیه‌ای از Aschbacher [۱] که بیان می‌کند اگر $\alpha$ یک خودریختی $(v,k,\lambda)-2$طرح متقارن از مرتبه عدد اول $p$ باشد، آن گاه $p|v$ یا $p \le k$ ، داریم

$$p \in \{2,3,5,7,11,13,17,19\}.$$

**الف:** $o(\alpha)=17$

در این حالت، بنا بر لم‌های۱ و ٤، $|fix(\alpha)| \in \{13,30\}$. اگر $B$ یک بلوک ثابت باشد، آن گاه بنا بر لم‌های ٦ (ج) و ۱۰، $B$ دقیقاً ۲ نقطه ثابت دارد. پس، $|fix(\alpha)|=\frac{2}{3}\binom{2}{2}+1$ (لم۸)، که عدد صحیح نیست. پس $17 \nmid |\mathrm{Aut}(D)|$.

**ب:** $o(\alpha)=13$

مجدداً بنا بر لم٤، $|fix(\alpha)| \in \{11,24\}$. لم٦(ج) دلالت بر این دارد که هر بلوک ثابت دارای شش نقطه ثابت است و بنا بر این $|fix(\alpha)|=11$. نتیجه ۱ دلالت بر این دارد که یک (۱۱،٦،۳)- طرح متقارن درون ساختار این طرح وجود دارد. اما این متناقض با لم۱۰ است. پس عدد ۱۳ مرتبه گروه خودریختی را عاد نمی‌کند.

**ج:** $o(\alpha)=11$

لم٤ نتیجه می‌دهد که $|fix(\alpha)| \in \{5,16,27,38\}$. که همه موارد مشابه حالت‌های قبل رد می‌شود. پس $11 \nmid |\mathrm{Aut}(D)|$.

**د:** $o(\alpha)=7$

مجدداً داریم $|fix(\alpha)| \in \{3,10,\ldots,38\}$. هربلوک ثابت ٥ یا ۱۲ نقطه دارد. اگر همه بلوک‌ها ٥ نقطه ثابت داشته باشند. در این‌صورت لم ۸ دلالت دارد که $|fix(\alpha)|$ عدد صحیح نیست. پس بلوکی وجود دارد که ۱۲ نقطه ثابت دارد. در نتیجه بنا به لم ۸، $|fix(\alpha)|=45$ که غیر ممکن است. پس $7 \nmid |\mathrm{Aut}(D)|$.

Downloaded from jsci.khu.ac.ir at 2:30 IRST on Tuesday November 13th 2018

**هـ:** $o(\alpha)=5$

در اینجا $|fix(\alpha)|\in\{0,5,\ldots,40\}$ که همه حالت‌ها به جز $|fix(\alpha)|=0$ بنا به لم۷ رد می‌شود.

**لم۱۱:** اگر $5^{\beta}\,\|\,|\mathrm{Aut}(D)|$ آن گاه $\beta\le 1$.

**اثبات:** فرض کنید $G\le|\mathrm{Aut}(D)|$ ازمرتبه۲۵ باشد. پس $G\simeq C_5\times C_5$ یا $G\simeq C_{25}$. حالت $G\simeq C_{25}$ به سادگی رد می‌شود. پس $G\simeq C_5\times C_5$ و درنتیجه مرتبه هر عنصر ۵ است. پس هیچکدام از عناصر $G$ به جز عنصر همانی نقطه ثابت ندارند. بنا بر لم کشی-فروبینیوس،

$$r=\frac{1}{25}\sum fix(\alpha)=\frac{115}{25}.$$

که یک تناقض است. پس $5^2 \nmid |\mathrm{Aut}(D)|$.

**و:** $o(\alpha)=19$

در اینجا $|fix(\alpha)|=1$ و مشابه لم ۱۱، $19^2 \nmid |\mathrm{Aut}(D)|$

قضیه زیرخلاصه بحث‌های فوق است:

**قضیه:** اگر $f\in\mathrm{Aut}(D)$ ، آن گاه $o(f)=2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}19^{\sigma}$ که در آن

الف) $\beta,\gamma,\sigma\le 1$؛

ب) اگر $o(f)=19$، آن گاه $|fix(\alpha)|=1$؛

ج) اگر $o(f)=5$، آن گاه $|fix(\alpha)|=0$؛

## منابع

1. M. Aschbacher, *On Collination Groups of Symmetric Block Design*, J. Combinatorail Theory Ser. A **11** (1971) 272-281

2. Bowler, *On the fixed points of an Automorphism of a symmetric design*, J. Combin. Theory Ser. A **43** (1986), 350-343.

3. Brouwer, *Block designs*, pp. 693-745 in Handbook of Combinatorics (ed. R.L. Graham, M. Grotschel, L. Lovasz), Elsevier, Amsterdam (1995).

4. E. Lander, *Symmetric designs: an algebraic approach*, Cambridge University Press, Cambridge (1983).