نشریه علوم دانشگاه تربیت معلم
جلد۱۰، شماره ۱
تاریخ چاپ: بهار ۱۳۹۱

جواب‌های مجانبی مسئلهٔ اغتشاشی تکین شامل معادلهٔ مرتبهٔ دوم خطی با ضرایب ثابت با شرایط کرانه‌ای دیریکله

علیرضا سرخسی، *محمد جهانشاهی: دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
s.alireza.sarakhsi@azaruniv.edu, jahanshahi@azaruniv.edu

چکیده

مسائل لایهٔ کرانه‌ای، مدل ریاضی پدیده‌های طبیعی و مسائل فیزیك و مهندسی هستند که در نقطه یا نقاطی که لایهٔ کرانه‌ای تشکیل می‌شود باید جواب‌های مسئله را با تکنیك‌های خاصی بررسی کرد تا جواب مسئله به‌صورت یك‌نواخت و یك‌پارچه درآید. برای این مسئله ابتدا شرایط کافی برای وجود و عدم وجود تشکیل لایهٔ کرانه ارائه می‌شود، سپس برای حالتی که در هر دو نقطه لایهٔ کرانه‌ای اتفاق می‌افتد، جواب تقریبی مسئله را با استفاده از روش بسط‌های مجانبی سازگار شده در پنج مرحله به‌صورت یك‌پارچه به دست می‌آوریم.

مقدمه

موضوع اصلی این مقاله، بررسی جواب‌های مسائل اغتشاشی تکین است که در خیلی از پدیده‌های فیزیکی و مهندسی از جمله مکانیك سیالات، مکانیك کوانتوم، کنترل بهینه، نظریه راکتور شیمیایی، آیرودینامیک، ژئوفیزیک، واکنش‌های شیمیایی و نظایر آن ظاهر می‌شوند. به‌عنوان مثال در معادلات ناویر استوکس زمانی که عدد رینولدز خیلی بزرگ است، در هیدرودینامیک وقتی که عدد هارتمن خیلی بزرگ است، در نظریه نوسان‌گر میله‌ها [۹]، [۱۰]، [۱۱] و نیز در حالتی که تنها تأثیر خورشید بر حرکت سیارات در نظر گرفته شود به یک معادله بدون پارامتر می‌رسیم، اما اگر تأثیر حرکت سیارات را نیز روی یکدیگر در نظر بگیریم به یک معادله با پارامتر کوچک برخورد می‌کنیم که در اینجا پارامتر کوچک همان نسبت جرم سیاره به جرم خورشید است که این نسبت برابر یک‌هزارم است. مسئلهٔ اغتشاشی تکین در واقع یك مسئلهٔ مقدار کرانه‌ای است که در ضریب بالاترین مرتبهٔ مشتق موجود در معادلهٔ دیفرانسیل، پارامتر کوچك و مثبت ε ظاهر می‌شود. موضوع مهم و پیچیده‌ای که در نظریهٔ ریاضی این مسائل و همچنین در مباحث فیزیکی و مهندسی مربوط به آن‌ها پیش می‌آید، پدیدهٔ لایهٔ کرانه‌ای است. صرف‌نظر از مفهوم فیزیکی لایهٔ کرانه‌ای، مفهوم ریاضی آن به این صورت است که وقتی در یك یا چند نقطهٔ کرانه‌ای یا داخلی ناحیهٔ مربوط به آن مسئله، پارامتر کوچك ε به صفر میل می‌کند. یك نوع ناهم‌آهنگی از نظر مرتبهٔ معادلهٔ دیفرانسیل و تعداد شرایط کرانه‌ای مسئله پیش می‌آید. در چنین مواردی جواب مسئله شامل معادله بدون جمله با ضرایب ε در شرایط کرانه‌ای مسئله صدق نمی‌کند. وجود لایه‌های کرانه‌ای نه خللی به‌وجود

واژه‌های کلیدی: مسئله لایهٔ کرانه‌ای، بسط‌های مجانبی جواب، شرایط سازگاری
دریافت ۸۹/۴/۲۶ پذیرش۹۰/۴/۲۵
*نویسنده مسئول

جواب و یگانگی جواب و نه خللی به خوش طرح بودن مسئلهٔ اغتشاشی وارد می‌کند. تنها موضوعی که در این حالت باید مورد توجه قرار گیرد، محاسبهٔ یك جواب تقریبی یك‌نواخت است که بر این اساس معادلهٔ مرتبهٔ دوم عادی با ضرایب ثابت $ay''+by'+cy=f(x)$ را با متغیر $y=zv$ که درآن $v=e^{-\frac{1}{2}\int\frac{b}{a}dx}$ است، می‌توان به‌صورت $z''+rz=\frac{f(x)}{v}$ در آورد که درآن $r=\frac{c}{a}-\frac{1}{4}(\frac{b}{a})^2$. حال بدون خلل به کلیت مسئله، دراین مقاله یك مسئلهٔ مقدار کرانه‌ای اغتشاشی تکینی را بدین صورت در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}&\varepsilon y_\varepsilon''(x)+ay_\varepsilon(x)=p(x); \qquad 0<x<1, \quad a<0,\\ &y_\varepsilon(0)=\alpha, \quad y_\varepsilon(1)=\beta,\end{aligned}$$

که درآن $p(x)$ تابعی پیوسته، α و β مقادیر دل‌خواه است. حال با استفاده از روش تغییر پارامتر، جواب دقیق مسئله را بدین‌صورت به دست می‌آوریم:

$$y_\varepsilon(x)=c_1e^{\rho_1(\varepsilon)x}+c_2e^{\rho_2(\varepsilon)x}-\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\int_0^1 p(\tau)e^{\sqrt{-\frac{a}{\varepsilon}}|x-\tau|}d\tau,$$

که درآن

$$\rho_k(\varepsilon)=(-1)^k; \qquad k=1,2.$$

حال با صدق دادن شرایط کرانه‌ای مسئلهٔ اغتشاشی تکین داریم:

$$c_1=\frac{\alpha+\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}(\int_0^1 p(\tau)e^{\sqrt{-\frac{a}{\varepsilon}}\tau}d\tau)-\beta e^{-\rho_2(\varepsilon)}-\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}(e^{-\rho_2(\varepsilon)}\int_0^1 p(\tau)e^{\sqrt{-\frac{a}{\varepsilon}}\tau}d\tau)}{1-e^{\rho_1(\varepsilon)-\rho_2(\varepsilon)}},$$

و

$$c_2=\frac{\beta e^{-\rho_2(\varepsilon)}+\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}(e^{-\rho_2(\varepsilon)}\int_0^1 p(\tau)e^{\sqrt{-\frac{a}{\varepsilon}}(1-\tau)}d\tau)-\alpha e^{\rho_1(\varepsilon)-\rho_2(\varepsilon)}-\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}(e^{\rho_1(\varepsilon)-\rho_2(\varepsilon)}\int_0^1 p(\tau)e^{\sqrt{-\frac{a}{\varepsilon}}(1-\tau)}d\tau)}{1-e^{\rho_1(\varepsilon)-\rho_2(\varepsilon)}}.$$

تعریف ۱. (روش حد یك‌نواخت مکرر) فرض کنیم $p_\varepsilon(y_\varepsilon)=0$ نشان‌گر مسئلهٔ اغتشاشی با عمل‌گر دیفرانسیل p_ε و $y_\varepsilon(x)$ جواب مسئلهٔ اغتشاشی باشند، فرض کنید p_0 عمل‌گر دیفرانسیل حاصل از جای‌گذاری $\varepsilon\to 0$ در صورت معادلهٔ دیفرانسیل باشدو $y_0(x)$ جواب حدی مسألهٔ $p_\varepsilon(y_\varepsilon)=0$ باشد که در آن ε به سمت صفر میل می‌کند اگر نمودار زیر جابجایی باشد:

$$\begin{array}{ccc} p_\varepsilon(y_\varepsilon)=0 & \to & y_\varepsilon(x)\\ \varepsilon\to 0 & & \varepsilon\to 0\\ \downarrow & & \downarrow\\ p_0(y_0)=0 & \to & y_0(x)\end{array}$$

مسئلهٔ اغتشاشی را ناتکین گویند یا به عبارتی دیگر هرگاه حد یك‌نواخت زیر برقرار باشد:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{x\to x_0} y_\varepsilon(x)=\lim_{x\to x_0}\lim_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon(x), \qquad (۱)$$

و مسئله رااغتشاشی تکین گویند هر گاه حد یك‌نواخت (۱) در نقطهٔ کرانه‌ای $x=x_0$ برقرار نباشد، که در آن نقطهٔ کرانه‌ای $x=x_0$ اختیاری است؛ و می‌تواند هر نقطهٔ کرانه‌ای دیگر در صورت مسئلهٔ اغتشاشی باشد [۱]، [۲].

تعریف ۲. (لایهٔ کرانه‌ای) در حالت تکین که (۱) برقرار نیست، ناهم‌آهنگی از لحاظ مرتبهٔ معادلهٔ دیفرانسیل و تعداد شرایط کرانه‌ای مسئلهٔ داده شده پیش می‌آید که سبب می‌شود جواب $y_0(x)$ در شرایط کرانه‌ای مسئله در نقطهٔ $x=x_0$ صدق نکند که این حالت در یك مسئلهٔ اغتشاشی تکین به پدیدهٔ لایهٔ کرانه‌ای موسوم است.

بررسی جواب تقریبی مسائل اغتشاشی تکین با ضرایب ثابت

در این بخش بر روی مسائل اغتشاشی تکین که دارای معادلهٔ دیفرانسیل با ضرایب ثابت است، جواب تقریبی را با استفاده از روش بسط‌های مجانبی ساز گار شده به دست می‌آوریم، برای چنین مسائل اغتشاشی، ابتدا جواب دقیق معادلهٔ دیفرانسیل مسئلهٔ اغتشاشی را پیدا کرده و بعد از روش حد یك‌نواخت مکرر در تشخیص این که لایهٔ کرانه‌ای در نزدیکی کدام نقطهٔ کرانه‌ای به‌وجود آمده است، استفاده می‌کنیم سپس جواب تقریبی مجانبی یك‌نواخت برای چنین مسائل اغتشاشی شامل حداقل یك لایهٔ کرانه‌ای در نزدیکی نقاط کرانه‌ای را با استفاده از مراحل پنج‌گانهٔ زیر که در آن $\varepsilon \downarrow 0$ میل می‌کند، به‌دست می‌آوریم:

مرحلهٔ اول) جستجوی جواب خارجی به‌صورت $y_{out}(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n y_n(x)$

در این مرحله جواب خارجی به صورت سری مجانبی را در معادلهٔ دیفرانسیل مسئلهٔ اغتشاشی صدق داده، بعد ضرایب توان‌های یك‌سانی از ε را گردآوری می‌کنیم سپس شرط کرانه‌ای مربوط به نقطهٔ کرانه‌ای را که در آن لایهٔ کرانه‌ای اتفاق نیفتاده است، را در معادلهٔ دیفرانسیل صدق می‌دهیم. در نتیجه دنباله‌ای از معادلات دیفرانسیل با شرایط کرانه‌ای مربوط به خود به دست می‌آید و برای پیدا کردن جواب عمومی هر یك از این معادلات از روش انتگرال‌گیری استفاده می‌کنیم که در این میان ثابت‌های انتگرال‌گیری مشخص می‌شوند. ثابت‌هایی که مشخص نشده‌اند با کمك اصل سازگاری مجانبی به‌دست می‌آیند.

مرحلهٔ دوم) معرفی مقیاسی برای ناحیهٔ داخلی به‌صورت $\xi_1=\dfrac{x-x_0}{\varepsilon^\alpha}$ (یا $\xi_2=\dfrac{x_1-x}{\varepsilon^\beta}$)**:**

چون در ناحیهٔ داخلی، ناحیهٔ خیلی باریك و ایزوله و سریعاً تغییرپذیر با نام لایهٔ کرانه‌ای به‌وجود می‌آید. برای این که شاهد تغییرات سریع در این ناحیه باشیم، از مقیاس $\xi_1=\dfrac{x-x_0}{\varepsilon^\alpha}$ (یا $\xi_2=\dfrac{x_1-x}{\varepsilon^\beta}$) استفاده می‌کنیم. بسته به این که لایهٔ کرانه‌ای در نزدیکی نقطهٔ کرانه‌ای x_0 از بازه (x_0,x_1) (یا در نزدیکی نقطهٔ کرانه‌ای x_1 از بازهٔ (x_0,x_1)) اتفاق می‌افتد. برای مشخص کردن $\alpha>0$ (یا $\beta>0$)، ابتدا مقیاس ξ_1 (یا ξ_2) را در معادلهٔ دیفرانسیل مسئلهٔ اغتشاشی تکین قرار می‌دهیم و از روش تعادل غالب که در آن با تعادل کردن جملات، معادلهٔ

تکین مربوط به ناحیهٔ داخلی را به معادلهٔ ناتکین تبدیل می‌کنیم، استفاده کرده و α (یا β) را به‌دست می‌آوریم. و از طرفی با مشخص شدن α (یا β) می‌توانیم ضخامت لایهٔ کرانه‌ای را نیز تشخیص دهیم زیرا ضخامت لایهٔ کرانه‌ای تابعی وابسته به پارامتر ε و به صورت $\delta = \varepsilon^{\alpha}$ (یا $\delta = \varepsilon^{\beta}$) است.

مرحلهٔ سوم) جستجوی جواب داخلی به‌صورت $Y_{inn}(\xi_1) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{\alpha n} Y_n(\xi_1)$ که در آن $Y_n(\xi_1) \equiv y_n(x)$ (یا $Y_n(\xi_2) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{\beta n} Y_n(\xi_2)$ که در آن $Y_n(\xi_2) \equiv y_n(x)$):

در این مرحله همانند مرحلهٔ اول جواب داخلی را به صورت سری مجانبی در معادلهٔ دیفرانسیل مسئلهٔ اغتشاشی تکین صدق می‌دهیم سپس ضرایب توان‌های یکسانی از ε را گردآوری می‌کنیم و شرط کرانه‌ای مربوط به نقطهٔ کرانه‌ای را که در آن لایهٔ کرانه‌ای اتفاق افتاده است در معادلهٔ دیفرانسیل صدق می‌دهیم. در نتیجه با فرض ε=۰ دنباله‌ای از معادلات دیفرانسیل با شرایط کرانه‌ای مربوط به خود به‌دست می‌آید. برای پیدا کردن جواب عمومی هر یک از این معادلات از روش انتگرال‌گیری استفاده می‌کنیم که در این میان ثابت‌های انتگرال‌گیری مشخص می‌شوند و ثابت‌هایی را که مشخص نشده‌اند با کمک اصل سازگاری مجانبی به‌دست می‌آوریم.

مرحلهٔ چهارم) (به‌کارگیری اصل سازگاری مجانبی)

در این مرحله برای این‌که پیوندی بین جواب خارجی و جواب داخلی به‌وجود آوریم از اصل سازگاری مجانبی کمک می‌گیریم. اصل سازگاری مجانبی در یک ناحیهٔ مشترک بین جواب داخلی و جواب خارجی با متغیرهای میانی $(\varepsilon \downarrow 0, \xi_1 \uparrow \infty, x \downarrow x_0)$ (یا $(\varepsilon \downarrow 0, \xi_2 \uparrow \infty, x \uparrow x_1)$) از مرتبهٔ یکسان به صورت ذیل سازگاری برقرار می‌کند که در آن x_0 (یا x_1) نقطه‌ای کرانه‌ای مربوط به مسئلهٔ اغتشاشی است:

$$\lim_{x \downarrow x_0} y_{out}(x) = \lim_{\xi_1 \uparrow \infty} Y_{inn}(\xi_1), \quad \text{(یا)} \quad \lim_{x \uparrow x_1} y_{out}(x) = \lim_{\xi_2 \uparrow \infty} Y_{inn}(\xi_2)$$

و این سازگاری منجر به پیدا شدن ثابت‌هایی می‌شود که در مراحل اول و سوم پیدا نشده بودند.

مرحلهٔ پنجم) (جواب تقریبی مجانبی یکنواخت)

در این مرحله با ثابت در نظر گرفتن پارامتر ε، یک جواب تقریبی یکنواخت یگانه، با فرض این‌که لایهٔ کرانه‌ای در نزدیکی $x = x_0$ (یا در نزدیکی $x = x_1$) اتفاق می‌افتد، به این صورت به‌دست می‌آوریم:

$$y_{unif} = y_{out}(x) + Y_{inn}(\xi_1) - y_{match1} \quad \text{(یا} \quad y_{unif} = y_{out}(x) + Y_{inn}(\xi_2) - y_{match2} \text{)}$$

که در آن تابع ثابت y_{match1} جواب ناحیهٔ سازگاری بین $y_{out}(x)$ و $Y_{inn}(\xi_1)$ است و همچنین تابع ثابت y_{match2} جواب ناحیهٔ سازگاری بین $y_{out}(x)$ و $Y_{inn}(\xi_2)$ است و نیز اگر لایهٔ کرانه‌ای در نزدیکی هر دو نقطهٔ کرانه‌ای x_0 و x_1 اتفاق بیفتد، جواب تقریبی مجانبی یکنواخت بدین صورت به‌دست می‌آید:

$$y_{unif} = y_{out}(x) + Y_{inn}(\xi_1) + Y_{inn}(\xi_2) - y_{match1} - y_{match2}.$$

روند حل مسئله

با استفاده از روش حد یکنواخت مکرر در نزدیکی نقاط کرانه‌ای و با فرض $a=-1$ و $p(x)=e^x$ و با تغییر در مقادیر شرایط کرانه‌ای مسئله، شرایط کافی برای وجود و عدم وجود تشکیل لایهٔ کرانه‌ای در نزدیکی نقاط کرانه‌ای را به دست می‌آوریم [۳]. در این میان چهار حالت به وجود می‌آید که برای حالتی که دو لایهٔ کرانه‌ای در نزدیکی نقاط کرانه‌ای اتفاق می‌افتد، با روش بسطهای مجانبی سازگار شده جواب تقریبی یک‌نواختی را برای مسئلهٔ اغتشاشی تکین به دست می‌آوریم [۲]، [۵]. حال با کمك جواب دقیق و رابطهٔ حدی زیر که از رفتار حدی تابع دلتای دیراک منتج می‌شود

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{e^{-\frac{|x-\tau|}{\sqrt{\varepsilon}}}}{2\sqrt{\varepsilon}}=\delta(x-\tau),$$

جواب حدی را به‌صورت $y_0(x)=-e^x$ به‌دست می‌آوریم. اکنون برای تشخیص وجود لایهٔ کرانه‌ای در نزدیکی نقاط کرانه‌ای با استفاده از روش حد یک‌نواخت مکرر چهار حالت به‌صورت زیر به وجود می‌آید:

حالت اول) اگر $\alpha\neq-1$ و $\beta\neq-e$ باشد:

برای نقطهٔ کرانه‌ای $x=0$ داریم:

$$\lim_{x\downarrow 0}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}y_\varepsilon(x)=\lim_{x\downarrow 0}y_0(x)=-1,$$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\lim_{x\downarrow 0}y_\varepsilon(x)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}y_\varepsilon(0)=\alpha.$$

لذا در نزدیکی نقطهٔ کرانه‌ای $x=0$ لایهٔ کرانه‌ای به وجود می‌آید.

همچنین برای نقطهٔ کرانه‌ای $x=1$ داریم :

$$\lim_{x\uparrow 1}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}y_\varepsilon(x)=\lim_{x\uparrow 1}y_0(x)=-e,$$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\lim_{x\uparrow 1}y_\varepsilon(x)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}y_\varepsilon(1)=\beta.$$

لذا در نزدیکی نقطهٔ کرانه‌ای $x=1$ نیز لایهٔ کرانه‌ای به وجود می‌آید.

حالت دوم) اگر $\alpha=-1$ و $\beta\neq-e$ باشد:

دراین حالت تنها در نزدیکی نقطهٔ کرانه‌ای $x=1$ لایهٔ کرانه‌ای به وجود می‌آید.

حالت سوم) اگر $\alpha\neq-1$ و $\beta=-e$ باشد:

در این حالت تنها در نزدیکی نقطهٔ کرانه‌ای $x=0$ لایهٔ کرانه‌ای به وجود می‌آید.

حالت چهارم) اگر $\alpha=-1$ و $\beta=-e$ باشد:

در این حالت در نزدیکی هیچ کدام از نقاط کرانه‌ای لایهٔ کرانه‌ای به وجود نمی آید.

اکنون در پی پیدا کردن جواب تقریبی مجانبی یکنواخت یگانه برای حالت اول با استفاده از مراحل پنج‌گانه برمی‌آییم که در آن شاهد به‌وجود آمدن دو لایهٔ کرانه‌ای در نزدیکی نقاط کرانه‌ای بودیم:

مرحلهٔ اول) (جستجوی جواب خارجی به صورت $y_{out}(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y_n(x)$)
با فرض $y_{out}(x) \sim y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \ldots$ و با جای‌گذاری در معادلهٔ دیفرانسیل مسئلهٔ اغتشاشی تکین داریم :

$$\varepsilon(y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \ldots)'' - (y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \ldots) = e^x.$$

اکنون با گردآوری ضرایبی از توان‌های یکسانی از ε در پی پیدا کردن جواب خارجی از مرتبهٔ $O(\varepsilon^0)$ هستیم:

$$O(\varepsilon^0): y_0(x) = -e^x,$$
$$\Rightarrow y_{out}(x) \sim y_0(x) = -e^x,$$
$$\Rightarrow y_{out}(x) = -e^x + O(\varepsilon).$$

مرحلهٔ دوم) معرفی مقیاسی برای ناحیهٔ داخلی نزدیک نقطهٔ کرانه‌ای $x = 0$ به‌صورت $\xi_1 = \dfrac{x}{\varepsilon^\alpha}$ و نیز برای ناحیهٔ داخلی نزدیک نقطهٔ کرانه‌ای $x = 1$ به صورت $\xi_2 = \dfrac{1-x}{\varepsilon^\beta}$:

دراین مرحله بااستفاده از روش تعادل غالب، ضخامت لایهٔ کرانه‌ای در نزدیکی هر کدام از نقاط کرانه‌ای را به‌دست می‌آوریم سپس معادلات دیفرانسیل جدید وابسته به متغیرهای نواحی داخلی را به‌دست می‌آوریم.

۱. معرفی مقیاسی برای ناحیهٔ داخلی نزدیک نقطهٔ کرانه‌ای $x = 0$:

با فرض $\xi_1 = \dfrac{x}{\varepsilon^\alpha}$ و با جای‌گذاری در معادلهٔ دیفرانسیل مسئلهٔ اغتشاشی تکین داریم:

$$\varepsilon^{1-2\alpha} \frac{d^2Y}{d\xi_1^{\,2}} - Y(\xi_1) = e^{\varepsilon^\alpha \xi_1}. \qquad (۲)$$

اکنون با استفاده از روش تعادل غالب و مراتب جملات (۲) برای به‌دست آوردن α، فرض می‌کنیم که مرتبهٔ جملهٔ اول با مراتب جملات دوم و سوم که با هم یکی هستند، به‌صورت مجانبی هم‌ارز است :

(مرتبهٔ جملهٔ اول)~(مرتبهٔ جملهٔدوم) $\Rightarrow \varepsilon^{1-2\alpha} = \varepsilon^0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{2},$

(مرتبهٔ جملهٔ اول)و(مرتبهٔ جملهٔدوم)$= O(\varepsilon^0),$

(مرتبهٔ جمله سوم)$= O(\varepsilon^0),$

$\Rightarrow O(\varepsilon^0) = O(\varepsilon^0).$

بنا بر این فرض درست است، لذا از روش تعادل غالب نتیجه می‌گیریم که

$\alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ (ضخامت لایهٔ کرانه‌ای)$= \delta = \varepsilon^\alpha \Rightarrow \delta = \sqrt{\varepsilon}.$

حال با قرار دادن $\alpha = \dfrac{1}{2}$ در (۲) داریم:

$$\frac{d^2Y}{d\xi_1^{\,2}} - Y(\xi_1) = e^{\sqrt{\varepsilon}\,\xi_1}. \qquad (۳)$$

۲. معرفی مقیاس برای ناحیهٔ داخلی نزدیك نقطهٔ کرانه‌ای $x=1$:

با فرض $\xi_2 = \dfrac{1-x}{\varepsilon^{\beta}}$ و با جای‌گذاری در معادلهٔ دیفرانسیل مسئلهٔ اغتشاشی تکین داریم:

$$\varepsilon^{1-2\alpha}\frac{d^2Y}{d\xi_2^{\ 2}} - Y(\xi_2) = e^{1-\varepsilon^{\beta}\xi_2}. \tag{۴}$$

اکنون با استفاده از روش تعادل غالب و مراتب جملات (۴) برای به دست آوردن β داریم :

فرض می‌کنیم که مرتبهٔ جملهٔ اول با مراتب جملات دوم و سوم که با هم یکی هستند به‌صورت مجانبی هم‌ارز است:

$$(\text{مرتبهٔ جملهٔ اول})\sim(\text{مرتبهٔ جملهٔدوم}) \Rightarrow \varepsilon^{1-2\beta} = \varepsilon^{0} \Rightarrow \beta = \frac{1}{2},$$
$$(\text{مرتبهٔ جملهٔ اول})\text{و}(\text{مرتبهٔ جملهٔدوم}) = O(\varepsilon^{0}),$$
$$(\text{مرتبهٔ جمله سوم}) = O(\varepsilon^{0}),$$
$$\Rightarrow O(\varepsilon^{0}) = O(\varepsilon^{0}).$$

بنا بر این فرض درست است. لذا از روش تعادل غالب نتیجه می‌گیریم:

$$\beta = \frac{1}{2} \Rightarrow (\text{ضخامت لایهٔ کرانه‌ای}) = \delta = \varepsilon^{\beta} \Rightarrow \delta = \sqrt{\varepsilon}.$$

حال با قرار دادن $\beta = \dfrac{1}{2}$ در (۴) داریم :

$$\frac{d^2Y}{d\xi_2^{\ 2}} - Y(\xi_2) = e^{1-\sqrt{\varepsilon}\xi_2}. \tag{۵}$$

مرحلهٔ سوم) جستجوی جواب داخلی در نزدیکی نقطهٔ کرانه‌ای $x=0$ به‌صورت $Y_{inn}(\xi_1) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{\alpha n} Y_n(\xi_1)$ که در آن $Y_n(\xi_1) \equiv y_n(x)$ و جواب داخلی در نزدیکی نقطهٔ کرانه‌ای $x=1$ بدین‌صورت است:

$Y_{inn}(\xi_2) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{\alpha n} Y_n(\xi_2)$ که در آن $Y_n(\xi_2) \equiv y_n(x)$

۱. پیدا کردن جواب داخلی نزدیك نقطهٔ کرانه‌ای $x=0$:

با توجه به $\alpha = \dfrac{1}{2}$ و با جای‌گذاری $Y_{inn}(\xi_1) \sim Y_0(\xi_1) + \sqrt{\varepsilon} Y_1(\xi_1) + \dots$ در (۳) داریم:

$$(Y_0(\xi_1) + \sqrt{\varepsilon} Y_1(\xi_1) + \dots)'' - (Y_0(\xi_1) + \sqrt{\varepsilon} Y_1(\xi_1) + \dots) = e^{\sqrt{\varepsilon}\xi_1}.$$

حال با صدق دادن شرط کرانه‌ای $y(0) = \alpha$ در بسط مجانبی فرض شده و همچنین با گردآوری ضرایبی از توان‌های یکسانی از ε در پی پیدا کردن جواب داخلی از مرتبهٔ $O(\varepsilon^{0})$ هستیم:

$$
\begin{aligned}
&O(\varepsilon^0): Y_0''(\xi_1) - Y_0(\xi_1) = 1,\\
&Y_0(0) = \alpha,\\
&\Rightarrow Y_{inn}(\xi_1) \sim Y_0(\xi_1) = (\alpha - c_2)e^{\xi_1} + c_2 e^{-\xi_1} - 1,\\
&\Rightarrow Y_{inn}(\xi_1) = (\alpha - c_2)e^{\xi_1} + c_2 e^{-\xi_1} - 1 + O(\sqrt{\varepsilon}).
\end{aligned}
$$

۲. پیدا کردن جواب داخلی نزدیك نقطهٔ کرانه‌ای $x = 1$:

با توجه به $\beta = \dfrac{1}{2}$ و با جای‌گذاری $\mathrm{Y}_{\mathrm{inn}}(\xi_2) \sim \mathrm{Y}_0(\xi_2) + \sqrt{\varepsilon}\mathrm{Y}_1(\xi_2) + \ldots$ در (۵) داریم:

$$
(\mathrm{Y}_0(\xi_2) + \sqrt{\varepsilon}\mathrm{Y}_1(\xi_2) + \ldots)'' - (\mathrm{Y}_0(\xi_2) + \sqrt{\varepsilon}\mathrm{Y}_1(\xi_2) + \ldots) = \mathrm{e}^{1-\sqrt{\varepsilon}\xi_2}.
$$

حال با صدق دادن شرط کرانه‌ای $y(1) = \beta$ در بسط مجانبی فرض شده و همچنین با گردآوری ضرایبی از توان‌های یك‌سانی از ε در پی پیدا کردن جواب داخلی از مرتبهٔ $O(\varepsilon^0)$ هستیم:

$$
\begin{aligned}
&O(\varepsilon^0): Y_0''(\xi_2) - Y_0(\xi_2) = e,\\
&Y_0(0) = \beta,\\
&\Rightarrow Y_{inn}(\xi_2) \sim Y_0(\xi_2) = \beta e^{\xi_2} + c_2'(e^{-\xi_2} - e^{\xi_2}) - e,\\
&\Rightarrow Y_{inn}(\xi_2) = \beta e^{\xi_2} + c_2'(e^{-\xi_2} - e^{\xi_2}) - e + O(\sqrt{\varepsilon}).
\end{aligned}
$$

مرحلهٔ چهارم) به‌کارگیری اصل سازگاری مجانبی:

۱. در ناحیهٔ مشترك بین جواب داخلی $Y_{inn}(\xi_1)$ و جواب خارجی $y_{out}(x)$ با متغیرهای میانی $(\varepsilon \downarrow 0, \xi_1 \uparrow \infty, x \downarrow 0)$ داریم:

$$
\begin{aligned}
&O(\varepsilon^0): \lim_{x\downarrow 0} y_{ourt}(x) = \lim_{\xi_1\uparrow\infty} Y_{inn}(\xi_1),\\
&-1 = \lim_{\xi_1\uparrow\infty}[(\alpha - c_2)e^{\xi_1} + c_2 e^{-\xi_1} - 1],\\
&\Rightarrow c_2 = \alpha.
\end{aligned}
$$

۲. در ناحیهٔ مشترك بین جواب داخلی $Y_{inn}(\xi_2)$ و جواب خارجی $y_{out}(x)$ با متغیرهای میانی $(\varepsilon \downarrow 0, \xi_2 \uparrow \infty, x \uparrow 1)$ داریم:

$$
\begin{aligned}
&O(\varepsilon^0): \lim_{x\uparrow 1} y_{ourt}(x) = \lim_{\xi_2\uparrow\infty} Y_{inn}(\xi_2),\\
&-e = \lim_{\xi_2\uparrow\infty}[\beta e^{\xi_2} + c_2'(e^{-\xi_2} - e^{-\xi_2}) - e],\\
&\Rightarrow c_2' = \beta.
\end{aligned}
$$

مرحلهٔ پنجم) جواب تقریبی مجانبی یك‌نواخت:

در این مرحله با جای‌گذاری $y_{out}(x)$ و $Y_{inn}(\xi_1)$ و $Y_{inn}(\xi_2)$ و $y_{match1}(x)$ و $y_{match2}(x)$ در $y_{unif} = y_{out}(x) + Y_{inn}(\xi_1) + Y_{inn}(\xi_2) - y_{match1} - y_{match2}$ که در آن $y_{match1}(x)$ و $y_{match2}(x)$ به‌ترتیب

جواب‌های نواحی مشترك در نزدیکی نقاط کرانه‌ای $x=0$ و $x=1$ است. و همچنین با توجه به $\xi_1 = \dfrac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$ و $\xi_2 = \dfrac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}$ داریم:

$$\begin{aligned} y_{unif} &= y_{out}(x) + Y_{inn}(\xi_1) + Y_{inn}(\xi_2) - y_{match1} - y_{match2} \\ &= \alpha e^{\frac{-x}{\sqrt{\varepsilon}}} + \beta e^{\frac{x-1}{\sqrt{\varepsilon}}} - e^{x}. \end{aligned}$$

نتیجه‌گیری

الگوریتم مذکور می‌تواند مبنای الگوریتم‌های محاسباتی برای حل مسائل اغتشاشی از نوع تکین یا ناتکین با شرایط کرانه‌ای دیریکله باشد که در آن تشخیص وجود یا عدم وجود لایهٔ کرانه‌ای در نزدیک نقاط کرانه‌ای و همچنین به‌دست آوردن جواب تقریبی یکنواخت برای هر کدام از حالت‌های فوق از مهم‌ترین اهداف این مقاله محسوب می‌شود. در صورتی‌که شرایط کرانه‌ای از نوع غیرموضعی و یا ضرایب معادلهٔ دیفرانسیل شامل متغیر باشد تشخیص لایه کرانه‌ای به‌مراتب سخت‌تر است که به‌عنوان مسائل حل نشده در ذیل آورده می‌شود:

مسائل حل نشده

الف) مسئله لایه مرزی با شرایط غیرموضعی

$$\begin{aligned} l_\varepsilon y_\varepsilon(x) &\equiv -\varepsilon y_\varepsilon''(x) + a y_\varepsilon'(x) + b y_\varepsilon(x) = 0, x \in (0,1), \\ l_i y_\varepsilon(x) &\equiv \Sigma_{j=0}^{1}[\alpha_{ij}^{(0)} y_\varepsilon^{(j)}(0) + \alpha_{ij}^{(1)} y_\varepsilon^{(j)}(1)] = \alpha_i, i = 1,2. \end{aligned}$$

ب) مسئلهٔ اغتشاشی تکین شامل معادلهٔ مرتبهٔ دوم خطی با ضرایب متغیر با شرایط کرانه‌ای دیریکله

$$\begin{aligned} &\varepsilon y_\varepsilon''(x) + a(x) y_\varepsilon'(x) + b(x) y_\varepsilon(x) = 0, \qquad 0 < x < 1, \\ &y_\varepsilon(0) = A, \qquad y_\varepsilon(1) = B. \end{aligned}$$

منابع

1. J. R. E. O`mally, "Introduction to Singular Perturbations", Academic Press, New York (1974).
2. J. R. E O`mally, "Singular Perturbation Methods For O.D.E`S" , Springer verlag (1991).
3. M. Jahanshahi, "Investigation Of Boundary Layers In a Singular Perturbation Problem Including a 4TH Order Ordinary Differential Equations", Journal of scinces, Vol. 2, Islamic Republic of Iran, Tehran (2001).
4. R. T. Pashaev, D. N. Aliev, "Uniformal correctness of B.V.P for Second Order O.D.E", News of Baku State University, Ni (1995).

5. E. P. Doolan, J. J. Miller, W. H. Schilders, "Uniform Numerical Methods for Problems With Initial and Boundary Layers", Bode Press, Dublin (1980).

6. J. Jayakumar, N. Ramanujam, "A numerical method for singular perturbation problems arising in chemical reactors theory", Appl.Math.Comput. (1994) 27.

7. V. Shanthi, N. Ramanujam, "A numerical method for boundary value problems for singulary perturbed fourth order O.D.E‘s", Appl., Math., Comput,129 (2002) 269-294.

8. J. Grasman, "Asymptotic Methods for Relaxation Oscillations and Applications Springer-Verlag", New York (1987).

9. J. Jayakumar, N. Ramanujam, "A computational method for solving singular perturbation problems", Appl., Math., Comput., 55 (1993) 31-48.

10. K. Hanjalic, B. E. Launder, "A Reynolds Stress Model of Turbulence and Its Application to Asymmetric Shear Flows", T. Fluid, Mech., 52 (1972).

11. E. C. Anderson, C. H. Lewis, "Laminar or Turbulent Boundary-LayerFlows of Perfect Gases or Reacting Gas Mixtures in Chemical Equilibrium", Nasa (1971).