یادداشتی بر برآوردگر درستنمایی بیشینه تقریبی پارامتریک فرایند AR(۱) مبتنی بر یک سری دوتایی و مقایسه آن با برآوردگر درستنمائی بیشینه داده‌های اولیه

حسینعلی نیرومند

گروه آمار - دانشکده علوم - دانشگاه فردوسی (مشهد)

چکیده:

در این مقاله یک فرآیند اتورگرسیو مرتبه اول $Z_t = \phi Z_{t-1} + u_t$ که u_tها متغیرهای تصادفی مستقل $N(0,\sigma^2)$ می‌باشند را در نظر می‌گیریم. این فرآیند را دوتایی کرده و آنرا $\{X_t\}$ می‌نامیم و باتوجه به این فرض که $\{X_t\}$ یک زنجیر مارکف می‌سازد، برآورد درستنمایی بیشینه تقریب $\hat{\phi}$ پارامتر ϕ مبتنی بر سری دوتایی را بدست آورده و آن را با برآوردگر درستنمایی بیشینه متداول مبتنی بر داده‌های اولیه مقایسه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی:

فرآیند اتورگرسیو، فرآیند دوتایی، زنجیر مارکف، برآوردگر درستنمایی بیشینه

مقدمه:

هدف این مقاله ارائه کار جدیدی در تحلیل سریهای زمانی است. تحلیلی که خواهیم دید مبتنی بر روشهای شمارش است که منجر به محاسبه سریع برآورد پارامتر یک فرآیند اتورگرسیو مرتبه اول می‌شود و زمان محاسبه آن را به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌دهد. فرآیند اتورگرسیو مانای مرتبه اول $\{Z_t\}$

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + u_t \qquad t = ..., -2, -1, 0, +1, +2, ...$$

که $|\phi| < 1$ و u_tها متغیرهای تصادفی $N(0,\sigma^2)$ مستقل‌اند و در اینصورت $\{Z_t\}$ یک فرآیند گوسی مانای با میانگین صفر است را در نظر می‌گیریم. حال سری $\{X_t\}$ را به صورت

$$X_t = \begin{cases} 1 & Z_t \geq 0 \qquad t = 1, 2, ..., n \\ 0 & Z_t < 0 \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم و سری حاصل که دنباله‌ای از صفر و یکهاست را یک سری دوتایی می‌نامیم که از لحاظ مقدار و پارامتر گسسته است و تحلیل بر مبنای آن آسان و سریع خواهد بود. با داشتن سری گسسته $\{X_t\}$ می‌توانیم تعداد گشتهای ۱ را مشاهده کنیم و در نتیجه اطلاعات در سری به شکل‌گیری انواع مختلف گشتها بستگی دارد. در اینجا فرض بر این است که سری $\{X_t\}$ یک زنجیر مارکف تشیل می‌دهد زیرا باتوجه به این فرض توزیع توام سری همواره امکان‌پذیر است. در این مقاله در صورت معلوم بودن سری دوتایی $X_1, X_2, ..., X_n$ از کمیتهای

$R = \sum_{t=2}^{n} X_t X_{t-1}$ و $S = \sum_{t=1}^{n} X_t$ و احتمال شرطی $\lambda_1 = Pr(X_t = 1 \mid X_{t-1} = 1)$ استفاده می‌کنیم و می‌توان دید که

S-R در حقیقت تعداد گشتهای ۱ است.

توزیع توام سری زمانی دوتایی $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ از زنجیر مارکف عبارتست از

$$P(X_1=x_1, \ldots, X_n=x_n) = 1/2 \prod_{i=2}^{n} \left(\prod_{y_i, y_{i-1}, \ldots, y_1}^{I_i, I_{i-1}, \ldots, I_1} \right)$$

بـه طـوری کـه حـاصل ضـرب دوم روی ۲ و ۱ تـایی $(y_i, y_{i-1}, \ldots, y_1)$, 0-1 بوده و

$$I_i = \begin{cases} x_i & y_i = 1 \\ 1-x_i & y_i = 0 \end{cases}$$

که در صورتیکه $P(X_1=x_1)=1/2$، این توزیع توزیع هر سری زمانی دوتایی $X_1, X_2, \ldots, X_n$ است.

قضیه (Yilvisaker, N.D(1965))

اگـر $\{X_t, t=1, 2, \ldots, n\}$ سـری دوتـایی حـاصل از $\{Z_t, t=1, 2, \ldots, n\}$ یک زنـجیر مـارکف تشـکیل دهـد در آنصورت توزیع تعداد دفعات تغییر از 0 به 1 و بالعکس دو جمله‌ای با پارامترهای n-1 و $1-\lambda_1$ است که $Pr(Z_t \geq 0)=1/2$.

تعریف (Malevich, T. L. (1969)

سـری $X_t^{(M)}$ را یک سـری M-dependent گـوییم هـرگاه $X_1^{(M)}, \ldots, X_k^{(M)}$ و $(X_{k+r}^{(M)}, \ldots, X_m^{(M)})$ وقتی $r>M$ مستقل باشند.

لم ۱

اگر $M \to O$ آنگاه $X_t^{(M)}$ به طور یکنواخت در t در میانگین توانهای دوم به X_t همگرا است Malevich ثابت می‌کند که درستنمایی مبتنی بر $X_t^{(M)}$ درستنمایی بر پایه X_t را تقریب می‌کند، بویژه برای M بزرگ و باتوجه به مانایی توزیع توام $X_1^{(M)}, X_2^{(M)}, \ldots, X_{2+M}^{(M)}, X_{3+M}^{(M)}, \ldots, X_{(n-1)+rM}^{(M)} X_{n+rM}^{(M)})$

که r عدد صحیح و مثبتی است عبارت است از:

$$P(X_1^{(M)}, X_2^{(M)}, X_{2+M}^{(M)}, X_{3+M}^{(M)}, \ldots, X_{(n-1)+rM}^{(M)}, X_{n+rM}^{(M)}) = P(X_1^{(M)}, X_2^{(M)}) \; P(X_2^{(M)}, X_3^{(M)}) \ldots$$

$$P(X_{n-1}^{(M)}, X_n^{(M)}) = (1/2)^{n-1}_{n-1} P(X_2 \mid X_1) \; P(X_3 \mid X_2) \ldots$$

$$P(X_n \mid X_{n-1}) = (1/2)^{n-1} (1-\lambda_1)^{2s-2r-x-x} \lambda_1^{(n-1)-(2s-2r-x-x)}$$

با اندک دقت دیده می‌شود که این عبارت به جز یک ثابت باتوجه به قضیه فوق و در صورتی که X_t مارکفی باشد توزیع تـوام $X_1, X_2, \ldots, X_n$ است. بنابراین این عبارت یک تابع درستنمایی تقریبی λ_1 است و بـرآوردگر درستنمایی بیشینه تقریبی λ_1 عبارت است از $\left| \frac{(n-1)-(2s-2r-x_1-x_n)}{(n-1)} \right|$ که اگر برای n بـزرگ از X_1 و X_n صـرفنظر کـنیم بـرآوردگـر $\frac{(n-1)-2(\text{تعدادگشتهای ۱})}{n-1}$ بدست می‌آید.

لم ۲ ((Cramer. H. (1946)

فرض کنید (X,Y) دارای یک توزیع نرمال دو متغیری با پارامترهای $EX = EY = 0$ و $VarY = VarX = \sigma^2$ و همبستگی ρ باشد آنگاه $P(X \geq 0, Y \geq 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} Sin^{-1}(\rho)$

باتوجه به این لم و باتوجه به این که در فرایند اتوگرسیو مرتبه اول $Z_t = \phi Z_{t-1} + u_t$ تابع خود همبستگی به صورت

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & K=0 \\ \phi^k & K \neq 0 \end{cases}$$

است می‌توان دید که

$$\phi = Sin\pi \left(\lambda_1 - \frac{1}{2}\right)$$

و بالاخره برآورد درستنمایی بیشینه تقریبی ϕ مبتنی بر فرایند $\{X_t, t=1, 2, \ldots, n\}$ عبارتست از

$$\hat{\phi} = Cos\left(\frac{2\pi (\text{تعداد گشتهای ۱})}{n-1}\right)$$

یک مطالعه شبیه‌سازی

مـی‌دانیم کـه بـرآوردگـر بیشینه متداول ϕ در فـرآیند اتـورگرسیو مـرتبه اول $Z_t = \phi Z_{t-1} + u_t$ کـه از داده‌هـای اولیـه بدست می‌آید با تغییراتی عبارت است از

(Box & jenkins(1976)

$$\bar{\phi} = \left(\sum_{t=2}^{n} Z_t Z_{t-1}\right) / \left(\sum_{t=2}^{n} Z_t^2\right)$$

چون می‌دانیم $\hat{\phi}$ برآوردگر درستنمایی بیشینه‌ای نیست که از $\{Z_t\ t=1, ..., n\}$ بدست می‌آید لذا می‌خواهیم بدانیم $\bar{\phi}$ در مقایسه با برآوردگر درستنمایی بیشینه $\hat{\phi}$ چقدر خوب است؟ برای انجام این امر با استفاده از شبیه‌سازی $\bar{\phi}$ را با $\hat{\phi}$ مقایسه می‌کنیم.

برای هر سه‌تایی (σ^2, ϕ, n) ده زوج $(\hat{\phi}$ و $\bar{\phi})$ را از ده سری به حجم n شبیه‌سازی شده از یک سری اتورگرسیو مرتبه اول بدست می‌آوریم. نتایج این شبیه‌سازی در جدول (۱) منعکس است که در آن $\hat{\phi}$ و $\bar{\phi}$ بترتیب میانگین $\hat{\phi}$ و $\bar{\phi}$ حاصل از سری $\{Z_t\}$ و سری دوتایی $\{X_t\}$ بوده و $\mathrm{MSE}(\hat{\phi}), \mathrm{MSE}(\bar{\phi})$ نیز بترتیب میانگین توان دوم خطای $\hat{\phi}$ و $\bar{\phi}$ از سریهای $\{Z_t\}$ و $\{X_t\}$ است. ملاحظه می‌کنیم که متوسط $\bar{\phi}$ برآورد نقطه‌ای را می‌دهد که به خوبی متوسط $\hat{\phi}$ است ولی میانگین توان دوم خطای $\bar{\phi}$ یا مساوی با میانگین توان دوم $\hat{\phi}$ است یا قدری از آن کمتر می‌باشد. معهذا برای داده‌های زیاد تفاوت بین دو برآورد قابل اغماض است.

جدول (۱): مقایسه بین برآوردگرهای $\bar{\phi}$ و $\hat{\phi}$ مبتنی بر ده سری به حجم n از فرآیند اتورگرسیو مرتبه اول

u_t $N(o,\sigma^2)$ که $Z_t = \phi Z_{t-1} + u_t$

σ^2	ϕ	n	$\bar{\phi}$	$\hat{\phi}$	MSE$\bar{\phi}$	MSE$\hat{\phi}$
	0.8	400	0.771	0.777	0.003	0.004
		600	0.780	0.789	0.001	0.002
		800	0.779	0.788	0.001	0.002
25	0.5	400	0.466	0.474	0.004	0.008
		600	0.472	0.479	0.003	0.004
		800	0.471	0.480	0.002	0.004
	0	400	-0.016	-0.016	0.004	0.004
		600	-0.019	-0.037	0.002	0.004
		800	-0.018	-0.029	0.003	0.004
	-0.4	400	-0.392	-0.371	0.004	0.007
		600	-0.405	-0.382	0.002	0.005
		800	-0.404	-0.391	0.002	0.006
	0.8	400	0.806	0.799	0.001	0.002
		600	0.801	0.801	0.000	0.002
		800	0.803	0.801	0.001	0.001
	0.5	400	0.505	0.509	0.002	0.006
		600	0.497	0.494	0.001	0.003
		800	0.500	0.490	0.001	0.002
	0	400	0.004	-0.013	0.003	0.007

	600	-0.006	-0.008	0.001	0.003
	800	-0.002	0.006	0.001	0.004
0.4	400	-0.387	-0.391	0.003	0.007
	600	-0.402	-0.401	0.001	0.003
	800	-0.400	-0.397	0.001	0.003
0.8	400	0.807	0.819	0.001	0.001
	600	0.800	0.809	0.001	0.001
					0.25
	800	0.796	0.804	0.000	0.001
0.5	400	0.512	0.525	0.002	0.007
	600	0.486	0.489	0.001	0.002
	800	0.497	0.508	0.001	0.002
0	400	0.020	0.016	0.004	0.010
	600	0.006	0.007	0.002	0.009
	800	0.001	0.004	0.001	0.006
0.4	400	-0.412	-0.407	0.001	0.002
	600	-0.408	-0.403	0.001	0.003
	800	-0.405	-0.396	0.001	0.002

نتیجه گیری:

ضمن این که داده‌ها را می‌توان تنها در یک آماره S-R منظور کرد که محاسبه آن بینهایت آسان و سریع است، از شبیه‌سازی به عمل آمده چنین برمی آید که $\hat{\phi}$ در مقایسه با $\tilde{\phi}$ برآوردگر نقطه‌ای بسیار خوبی برای ϕ است. این برآوردگر ضمن این که زمان محاسبات را به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌دهد و خیلی سریع است بسیار اقتصادی‌تر از برآوردگر متداول $\tilde{\phi}$ است و تفاوت در دقت این دو برآوردگر قابل صرف‌نظر کردن است.

REFERENCES

1- Box, G, E. P and Jenkins, G. M. (1976), TIME SEPIES Analysis forecasting and control, Holden Day.

2- Cramer, H. (1946), mathematical methods of statistics, priceton university press.

3- Malevich, T. L. (1969). Asympotic normality of the number of crossings of level zero by a Gaussian process. Theor. Prob. Applic. 14:287-295

4- Yilvisaker, N. D. (1965). The expected number of zeros of a stationary gaussian process, Annals Math Statist, 36:1043-1046.